



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ PORUŠENÍ KERAMICKÝCH  
ČÁSTICOVÝCH KOMPOZITNÍCH MATERIÁLŮ**

NUMERICAL MODELING OF FAILURE OF A PARTICLE COMPOSITE WITH CERAMIC MATRIX

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Michal Kosorín**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.**

**BRNO 2020**

# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Michal Kosorín</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Zdeněk Majer, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Výpočtové modelování porušení keramických částicových kompozitních materiálů

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce bude zaměřena zejména na popis šířící se trhliny v keramických částicových kompozitních materiálech. Obecně mají keramické materiály vynikající vlastnosti, např. odolnost proti vysokým teplotám, vysokou pevnost, ale zároveň jsou také velice křehké. Ukazuje se, že kompozitní materiál tvořený dvěma nebo i více typy keramik může mít výrazně lepší lomové vlastnosti než jeho jednotlivé složky. V diplomové práci bude studováno chování trhliny šířící se za podmínek sub–kritického růstu v částicovém keramickém kompozitu typu Low–Temperature Co–fired Ceramics (LTCC), který se používá např. v mikroelektronice při výrobě desek plošných spojů.

### Cíle diplomové práce:

Cílem diplomové práce je studium chování trhliny šířící se za podmínek sub–kritického růstu v keramické matici částicového kompozitního materiálu. Pro toto studium by měl být vytvořen numerický model částicového kompozitu s trhlinou.

Díličí cíle práce jsou následující:

- seznámení se základy lineárně–elastické lomové mechaniky (LELM),
- popis a literární rešerše postupů stanovení směru šíření trhliny,
- vytvoření 3D numerického modelu částicového kompozitu s trhlinou v prostředí ANSYS.

Na základě provedených simulací by měl být popsán mechanismus šíření trhliny v zadaném kompozitním materiálu, přičemž budou brány do úvahy různé počáteční konfigurace trhliny vycházející z rozmístění defektů v reálném kompozitu.

**Seznam doporučené literatury:**

VASILIEV, V. V., E. V. MOROZOV: Advanced Mechanics of Composite Materials. Elsevier. Amsterdam. 2007.

ANSYS Inc, ANSYS Release 18.1 User's Manual, Swanson Analysis Sys. Inc, Pennsylvania. 2016.

ANDERSON, T. L.: Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications, 3rd Edition. CRC Pres. Boca Raton. 2005.

MAJER Z.: Lomově-mechanický model částicového kompozitu, disertační práce. Brno. 2010.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Subkritický rast trhlín v kompozitných materiáloch zohráva pomerne dôležitú rolu pri určovaní ich životnosti a vedie k rastu porúch pri zaťažení pod úrovňou lomovej húževnatosti. V práci je uvedený rešerš niekoľkých vedeckých prác zaoberajúcich sa určovaním smeru šírenia trhliny v kompozitných materiáloch. Cieľom tejto diplomovej práce bolo vytvoriť 2D a 3D konečno-prvkové modely pre analýzu šírenia trhliny v nízкотеплотне vypaľovanej keramike (LTCC). Na základe výpočtu času šírenia trhliny pri podmienkach subkritického rastu boli tieto modely porovnané.

## **Abstract**

Subcritical crack growth in composite materials plays quite an important role in determination of the service life and leads to the defects growth below the fracture toughness. The thesis presents search of the several scientific works dealing with the determination of the crack growth direction in composite materials. The aim of this diploma thesis was to create 2D and 3D finite element models to analyse crack growth in Low Temperature Co-fired Ceramics (LTCC). These models were compared based on the time calculation of the crack propagation under the subcritical growth conditions.

## **Kľúčové slová**

Lomová mechanika, Subkritický rast trhliny, Nízкотеплотне vypaľovaná keramika, Kompozitný materiál

## **Keywords**

Fracture mechanics, Subcritical crack growth, Low Temperature Co-fired Ceramics, Composite material

## **Bibliografická citácia**

KOSORÍN, Michal. *Výpočtové modelování porušení keramických částicových kompozitních materiálů*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124589>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Zdeněk Majer.

## **Čestné prehlásenie**

Prehlasujem, že som diplomovú prácu na tému „Výpočtové modelovanie porušení keramických časticových kompozitných materiálov“ vypracoval samostatne pod vedením môjho vedúceho Ing. Zdeňka Majera, Ph.D. s použitím odbornej literatúry uvedenej na zozname, ktorý je v práci zahrnutý.

18.06.2020

.....

Michal Kosorín

## **Pod'akovanie**

Týmto by som rád pod'akoval vedúcemu tejto diplomovej práce, Ing. Zdeňkovi Majerovi, Ph.D., za všetky cenné rady a pripomienky pri vypracovaní diplomovej práce a v neposlednej rade aj rodine za podporu počas celej doby štúdia.

# Obsah

<b>Úvod.....</b>	<b>10</b>
<b>1.Problémová situácia .....</b>	<b>11</b>
1.1. Formulácia problému .....	11
1.2. Ciele práce .....	11
<b>2.Systém podstatných veličín .....</b>	<b>12</b>
2.1. Výber metódy riešenia.....	13
<b>3.Základy lomovej mechaniky .....</b>	<b>14</b>
3.1. Základné rozdelenie lomovej mechaniky .....	14
3.2. Podmienky platnosti LELM .....	15
3.3. Energetické kritérium .....	16
3.3.1. Koncepcia hnacej sily trhliny .....	16
3.3.2. Koncepcia $J$ – integrálu .....	18
3.4. Súčiniteľ intenzity napätia .....	19
3.4.1. Metódy určovania súčiniteľa intenzity napätia.....	21
3.5. Lomová húževnatosť .....	25
3.6. Odhad smeru šírenia trhliny.....	26
3.7. Subkritický rast trhlín.....	27
3.7.1. Rýchlosť šírenia trhliny pri podmienkach subkritického rastu.....	28
<b>4.Základná teória kompozitných materiálov .....</b>	<b>30</b>
4.1. Rozdelenie kompozitných materiálov .....	30
4.2. LTCC kompozitný materiál.....	31
<b>5.Rešerš numerického modelovania šírenia trhliny v kompozitných materiáloch .</b>	<b>32</b>
5.1. Predikcia smeru šírenia už existujúcej trhliny .....	32
5.2. Šírenie trhliny v náhodných mikroštruktúrach .....	35



5.3. Vplyv lokálnej štruktúry na súčiniteľa intenzity napätia.....	37
<b>6.Realizácia numerického modelovania .....</b>	<b>40</b>
6.1. Úloha 2D.....	41
6.1.1. Tvorba siete konečných prvkov .....	41
6.1.2. Okrajové podmienky .....	42
6.1.3. Overenie správnosti výpočtu súčiniteľa intenzity napätia.....	43
6.1.4. Riešenie 2D úlohy vláknového kompozitu.....	45
6.2. Úloha 3D valcová častica .....	49
6.2.1. Tvorba siete konečných prvkov .....	50
6.2.2. Okrajové podmienky .....	50
6.2.3. Riešenie úlohy s valcovou časticou v 3D.....	51
6.3. Porovnanie 2D a 3D modelu valcovej častice .....	56
6.3.1. Porovnanie hodnôt súčiniteľa intenzity napätia pre mód I.....	56
6.3.2. Porovnanie hodnôt súčiniteľa intenzity napätia pre mód II .....	58
6.3.3. Porovnanie hodnôt uhlu šírenia trhliny .....	59
6.4. Úloha 3D guľová častica .....	61
6.4.1. Tvorba siete konečných prvkov .....	61
6.4.2. Okrajové podmienky .....	62
6.4.3. Riešenie úlohy 3D s guľovou časticou.....	62
6.5. Subkritický rast trhliny .....	67
<b>Záver .....</b>	<b>69</b>
<b>Zoznam použitej literatúry .....</b>	<b>71</b>
<b>Zoznam obrázkov.....</b>	<b>75</b>
<b>Zoznam tabuliek.....</b>	<b>78</b>
<b>Zoznam príloh .....</b>	<b>79</b>

## Úvod

Lomová mechanika je vedný obor, ktorý v sebe spája niekoľko samostatných oblastí ako napríklad materiálové inžinierstvo, matematika či mechanika. Zaoberá sa najmä popisom správania sa telies obsahujúcich defekt, konkrétne trhlinu. Vznikla za účelom potreby dokonalejšieho popisu koncentrátorov napätia pri určovaní životnosti konštrukcií. Pri vhodnom popise medzných stavov telies s trhlínami je možné predikovať smer šírenia trhliny a postupne znižovať riziko poruchy, a tým priamo zvyšovať bezpečnosť prevádzkovania určitej konštrukcie.

Kompozitné materiály sú dnes jednými z najrozšírenejších materiálov používaných v inžinierskych aplikáciách. Najväčšou výhodou tohto typu materiálu je, že je možné vhodných zostavením jeho zložiek priamo ovplyvňovať jeho mechanické vlastnosti, a tak ho priamo prispôbiť na potrebný účel. Práve z tohto dôvodu patria kompozitné materiály medzi najprogresívnejší typ materiálov. Môžu byť tvorené dvomi alebo viacerými zložkami, pričom každá má zväčša výrazne odlišné vlastnosti. Spoločne však formujú nový materiál s vlastnosťami ako sú odolnosť voči vysokým teplotám, vysoká pevnosť, ale aj krehkosť. Pri snahe, im čo najlepšie porozumieť je podstatné štúdium ich lomového správania.

Typom kompozitného materiálu, ktorému sa táto diplomová práca venuje podrobnejšie, je nízkoteplotne vypaľovaná keramika (LTCC). Využíva sa najmä v automobilovom priemysle, komunikačných zariadeniach, ale aj v lekárskejších aplikáciách. Dôležitým faktorom, na ktorý sa pri používaní tohto typu materiálu nesmie zabúdať, je podkritický rast trhlín. Pri zaťažení môžu trhliny v kompozitnom materiály rásť aj pri nižších hodnotách súčiniteľa intenzity napätia ako je hodnota lomovej húževnatosti. Práve na túto vlastnosť sa pri používaní LTCC keramiky nesmie zabúdať.

Diplomová práca je zameraná na vytvorenie 2D a 3D modelu telesa predstavujúceho kompozitný materiál za účelom simulovať podkritické šírenie trhliny. Uvažované sú pritom dva tvary častice, a to guľový alebo valcový tvar.

# 1. Problémová situácia

Táto diplomová práca je zameraná na šírenie trhliny v keramických kompozitných materiáloch. Tento typ materiálov má viaceré užitočné vlastnosti: nereaktivnosť, nevodivosť, odolnosť voči vysokým teplotám, vysokú pevnosť, ale zároveň sa jedná o významne krehký materiál. Pokiaľ je kompozitný materiál dobre navrhnutý, má vždy ako celok výrazne lepšie lomové vlastnosti než jeho jednotlivé zložky. V práci sa bude skúmať lomové správanie kompozitného materiálu, čo sa následne aplikuje na pochopenie šírenia trhliny v keramickom kompozite typu LTCC (Low-Temperature Co-fired Ceramics) [7,5,19], ktorý sa využíva v mikroelektronike. Pre predikciu životnosti takéhoto materiálu je podstatné pochopiť spôsob šírenia trhliny v danom prostredí.

V minulosti bolo popísané chovanie trhliny v keramickom kompozite podrobne pre rôzne prípady výpočtového modelovania v 2D [22,14,21]. Správanie sa trhliny v 3D časticovom kompozite doposiaľ nebolo dostatočne rozobraté, čo je jedným z cieľov tejto diplomovej práce.

## 1.1. Formulácia problému

Účelom tejto diplomovej práce je štúdium správania trhliny šíriacej sa v matici časticového kompozitného materiálu. Pre toto štúdium bude vytvorený 2D a 3D výpočtový model kompozitu s trhlinou v prostredí softvéru ANSYS. Na základe uskutočnených simulácií bude popísaný mechanizmus šírenia trhliny v zadanom kompozitnom materiály, pričom budú brané do úvahy rôzne konfigurácie modelov geometrie.

## 1.2. Ciele práce

Základnými cieľmi tejto diplomovej práce sú:

- zoznámenie sa so základmi lineárne-elastickej lomovej mechaniky;
- popis a literárna rešerš postupov pri stanovení smeru šírenia trhliny;
- vytvorenie 2D a 3D numerického modelu kompozitného materiálu s trhlinou v prostredí systému ANSYS za podmienok subkritického rastu trhliny.

## 2. Systém podstatných veličín

Po sformulovaní problému a požadovaných cieľoch práce je možné pristúpiť k určeniu systému podstatných veličín [15] tejto diplomovej práce:

$\Omega$ : Objekt

Objektom tejto diplomovej práce je keramický časticový kompozit typu LTCC (Low-Temperature Co-fired Ceramics).

S0: Okolie objektu

Subkritický rast trhliny v kompozitnom materiáli je spôsobený prostredím, v ktorom sa objekt nachádza – napríklad vlhké korozívne prostredie.

S1: Geometria a topológia entity

Model geometrie kompozitu zložený z matrice a vlákna pre 2D prípad a pre úlohu v 3D z matrice a častice. V prvej časti práce je objekt v 2D pri podmienkach rovinnej deformácie. V druhej časti práce je model geometrie 3D kompozitu pri rôznych nastaveniach okrajových podmienok (rovinnej deformácie a napätosti na stenách kompozitu).

S2: Väzby a interakcia s okolím

V práci je simulovaná ťahová skúška na skúšobnej vzorke, čomu odpovedajú aj väzby a do úvahy sa berie len silové zaťaženie jednoosím ťahom.

S3: Aktivácia entity s okolím

Entita je aktivovaná jednoosím ťahom (ťahovou skúškou).

S4: Ovpływňovanie entity s okolím

Entitu ovplyvňuje korozívne prostredie, ktoré ma za následok subkritický rast trhliny v objekte.

S5: Vlastnosti štruktúry entity

Kompozitný materiál je popísaný modulom pružnosti v ťahu a Poissonovým pomerom pre matricu a časticu (vlákno).

S6: Veličiny popisujúce procesy a stavy

Napätosť na čele trhliny, uhol šírenia trhliny v objekte.

S7: Prejavy

Vo vzťahu k deformácii:

Roztváranie a šírenie trhliny, vznik nových lomových plôch.

Vo vzťahu k napätiu:

Napätosť na čele trhliny.

S8: Dôsledky prejavu

Subkritické šírenie trhliny a dosiahnutie medzného stavu krehkého porušenia.

## **2.1. Výber metódy riešenia**

Po zostavení systému podstatných veličín, môže byť pre riešenie problému šírenia trhliny v kompozitnom materiáli zaťaženého jednoosím ťahom vybraná vhodná metóda riešenia. Tento problém bude riešený pomocou výpočtového modelovania v softvéri ANSYS, kde na vyhodnotenie lomových parametrov bude použitý súčiniteľ intenzity napätia.

### **3. Základy lomovej mechaniky**

V nasledujúcej kapitole budú popísané základné pojmy a teórie lomovej mechaniky [28,1]. Niektoré z nich budú neskôr v práci využité.

Oblasť lomovej mechaniky v podstate neexistovala až do obdobia 2. svetovej vojny [1]. Od tej doby sa však stala uznávanou vednou disciplínou. Aplikácia lomovej mechaniky v priemysle je dnes už pomerne bežná, a čo kedysi slúžilo len niekoľkým špecialistom, dnes využíva takmer každý inžinier.

Lomová mechanika vo svojich základoch pracuje s predpokladom existencie počiatočnej trhliny v telese. Pôvod trhliny môže byť rôzny: pri výrobe, po povrchovej úprave, materiálovým defektom alebo externým poškodením (napr. pri manipulácii s telesom). Podstatnou časťou lomovej mechaniky je experimentálne zisťovanie veľkosti odporu materiálu proti rastu trhliny, vďaka ktorému sa môže predikovať zostávajúca životnosť telesa alebo prípustná veľkosť trhliny pre dané zaťaženie.

#### **3.1. Základné rozdelenie lomovej mechaniky**

Prirodzeným historickým vývojom sa lomová mechanika rozdelila na dve základné oblasti:

1. Lineárne elastická lomová mechanika (LELM) – je obmedzená na zaťaženie, ktorého dôsledkom je malá plastická zóna na čele trhliny a je možné ju zanedbať. Táto oblasť lomovej mechaniky využíva platnosť Hookovho zákona v celom objeme telesa.
2. Elasto – plastická lomová mechanika (EPLM) – uvažuje veľkú plastickú oblasť na čele trhliny, častokrát aj kompletne plastické zdeformovanie prierezu telesa s trhlinou.

Nakoľko sa táto diplomová práca zaoberá výhradne lomovou mechanikou keramického kompozitného materiálu, pre ktorý je charakteristický krehký lom s malou plastickou zónou na čele trhliny, ďalej bude popisovaná výhradne LELM.

Prístup k vyhodnocovaniu LELM sa dá definovať pomocou dvoch základných kritérií:

1. Energetické kritérium

Toto kritérium je založené na energetickej bilancii telesa s trhlinou. Existuje viacero rôznych prístupov medzi inými napríklad aj Griffithova teória [1], teória hnacej sily trhliny  $G$ ,  $R$ -krivky [28] či  $J$ -integrál [28].

2. Kritérium na základe napätia a deformácie na čele trhliny

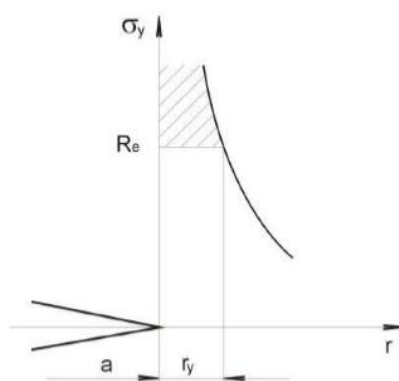
Využíva sa najmä výpočet súčiniteľa intenzity napätia  $K$ , ale aj určovanie rozovretia trhliny  $\delta$  [28].

### 3.2. Podmienky platnosti LELM

Ako už bolo uvedené, tak na rozdiel od EPLM, uvažuje LELM veľkosť plastickej zóny významne menšiu v porovnaní so šírkou telesa (max. 2% šírky telesa). V dôsledku plastizácie na čele trhliny dôjde k otupeniu jej čela a prerozdeleniu napätia. Veľkosť polomeru plastickej zóny s prihliadnutím na toto prerozdelenie je možné spočítať pomocou vzťahu [28]:

$$r_y = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \left( \frac{K_I}{R_e} \right)^2, \quad (3.1)$$

kde sa parameter  $\alpha$  rovná pre rovinnú deformáciu  $1/3$  a pre rovinnú napätosť  $1$ .  $R_e$  je medza sklzu daného materiálu a  $K_I$  je faktor intenzity napätia.



Obrázok číslo 1 - Plastická zóna [28]

### 3.3. Energetické kritérium

Energetické kritérium predpokladá, že rast trhliny nastáva len vtedy, pokiaľ je energia potrebná na rast trhliny vyššia ako kritická medza. Energetická bilancia v telese sa dá zhrnúť nasledovne [1]:

$$\frac{dE_c}{dS} = \frac{d\Pi}{dS} + \frac{d\Gamma}{dS} = 0, \quad (3.2)$$

kde  $dS$  je prírastok plochy,  $\Pi$  je potenciálna energia telesa,  $\Gamma$  je disipačná energia a  $E_c$  je celková energia telesa. Pri raste trhliny v telese sa postupne spotrebúva energia na vytvorení nových trhlinových plôch, energia na plastickú deformáciu v okolí čela trhliny a takisto energia na lokálny ohrev materiálu.

#### 3.3.1. Koncepcia hnacej sily trhliny

Táto energetická koncepcia vznikla priamo zjednodušením Griffitovho kritéria, kvôli potrebe využitia tohto prístupu pri riešení reálnych inžinierskych problémov. Vychádza z podmienky rovnosti [1]:

$$-\frac{d\Pi}{dS} = \frac{d\Gamma}{dS}, \quad (3.3)$$

kde práva strana rovnice predstavuje:

$$R = \frac{d\Gamma}{dS}. \quad (3.4)$$

$R$  sa označuje ako lomová húževnatosť materiálu, a teda odpor materiálu proti rastu trhliny. Inak povedané, energia potrebná na vytvorenie novej lomovej plochy s jednotkovou veľkosťou.

Ľavá strana rovnice číslo 3.3:

$$G = -\frac{d\Pi}{dS}, \quad (3.5)$$

táto rovnica reprezentuje rýchlosť uvoľňovania deformačnej energie a nazýva sa aj hnacia sila trhliny (s označením  $G$ ). Popisuje rýchlosť zmeny potenciálnej energie sústavy v závislosti na prírastku lomovej plochy. Rozmer oboch veličín  $R$  a  $G$  je N/m alebo J/m<sup>2</sup>.



Pri uvažovaní nekonečne veľkého telesa s centrálnou trhlinou je možné vyjadriť hnaciu silu trhliny ako:

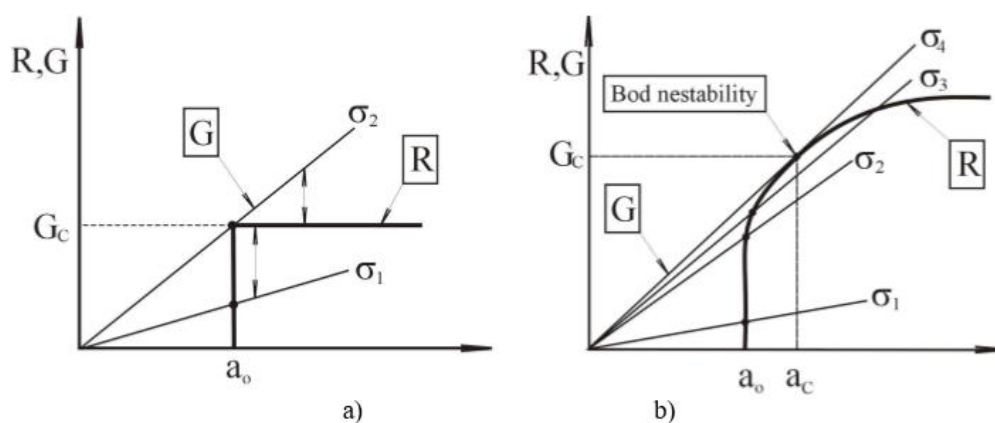
$$G = -\frac{d\Pi}{dS} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}, \quad (3.6)$$

kde  $\sigma$  je nominálne napätie v telese,  $E$  je modul pružnosti v ťahu pre daný materiál,  $a$  je dĺžka trhliny. Medzná hodnota hnacej sily trhliny, pri ktorej dôjde k strate stability trhliny sa označuje  $G_c$  a nazýva sa lomová húževnatosť materiálu. Túto materiálovú charakteristiku je možné získať napríklad pomocou experimentu.

Odpor proti šíreniu trhliny  $R$  a hnacia sila trhliny  $G$  sa menia v závislosti na zmene dĺžky trhliny. Táto závislosť rozhoduje o charaktere rastu trhliny, to znamená či sa bude trhlina šíriť stabilne alebo nestabilne. Všeobecne k rastu trhliny dôjde pri splnení podmienky:

$$G = R = 2w_f. \quad (3.7)$$

Pri určovaní charakteru rastu trhliny sa využívajú mimo iného aj  $R - G$  krivky. Na obrázku číslo 2 sú znázornené tieto krivky pre nekonečnú stenu s centrálnou trhlinou, ktorá je zaťažená ťahom. Je dôležité dodať, že hnacia sila trhliny lineárne narastá s rastúcou dĺžkou trhliny pri konštantnom napätí.



Obrázok číslo 2 -  $R - G$  krivky [28]

- a) V prvom prípade na obrázku číslo 2 je odpor proti rastu trhliny konštantný a nezávislý na raste trhliny. Pokiaľ je zaťaženie na úrovni namáhania  $\sigma_1$ , nedochádza k zväčšovaniu trhliny a charakter jej rastu zostáva stabilný. Pokiaľ však bude charakter zaťaženia na úrovni  $\sigma_2$ , dochádza k iniciácii nestabilného rastu. Tento prípad je charakteristický pre ideálne krehký materiál.
- b) V druhom prípade z obrázku číslo 2 má odpor proti rastu trhliny vzrastajúcu tendenciu. Pri zaťažení, ktoré odpovedá  $\sigma_2$  dochádza k stabilnému charakteru šírenia trhliny, avšak s malým nárastom trhliny, pretože  $G=R$  a súčasne platí:

$$\frac{dG}{da} \leq \frac{dR}{da}. \quad (3.8)$$

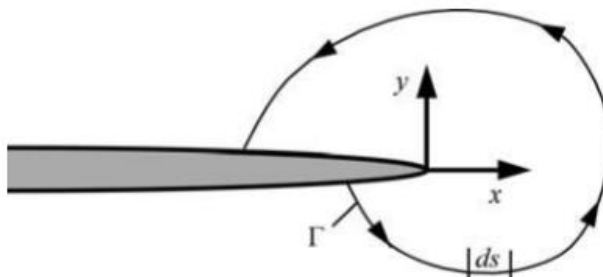
Pri napätí  $\sigma_3$  dochádza rovnako k stabilnému nárastu. Pokiaľ však zaťaženie dosahuje charakter  $\sigma_4$  a priamka hnacej sily trhliny je dotyčnicou ku krivke odporu proti rastu, bude platiť:

$$\frac{dG}{da} \geq \frac{dR}{da}. \quad (3.9)$$

To znamená, že dôjde k nestabilnému šíreniu trhliny. Okamžik nestability závisí na priebehu  $R - a$ , rovnako aj na priebehu  $G - a$ , čo má za príčinu, že húževnatosť materiálu ( $G_c$ ) nie je jednoznačne definovaná.

### 3.3.2. Konceptia J – integrálu

Koncepciu krivkového J – integrálu, ktorý je nezávislý na integračnej ceste (obr. č. 3), použil ako prvý Rice v roku 1968, aby analyzoval napätosť pri telesách s trhlinou. Tento prístup našiel svoje uplatnenie hlavne ako parameter charakterizujúci lom nelineárnych materiálov. Vďaka idealizácii elasto-plastickej deformácie ako nelineárne elastickej došlo k rozšíreniu použiteľnosti LELM.



Obrázok číslo 3 - Krivkový J - integrál [28]

Pre homogénne teleso s vrubom, ktorého materiál vykazuje lineárne elastické alebo nelineárne elastické vlastnosti, pri stave rovinnej deformácie môžeme uviesť  $J$  – integrál v tvare [28]:

$$J = \int_{\Gamma} \left( \lambda dy - T \frac{\partial u}{\partial x} ds \right), \quad (3.10)$$

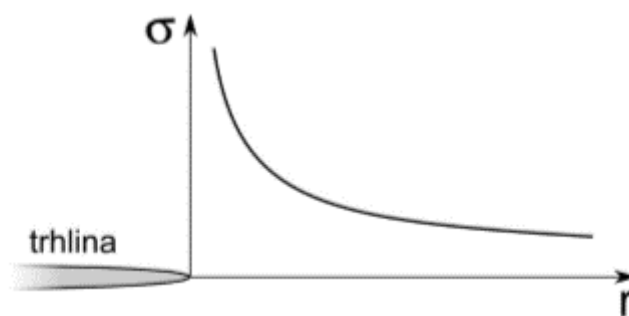
kde  $\Gamma$  je krivka, ktorá vedie okolo koreňa vrubu,  $T$  je vektor povrchových síl,  $ds$  je element na krivke  $\Gamma$  a  $\lambda$  je hustota deformačnej energie, ktorá je definovaná:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (3.11)$$

kde  $\sigma_{ij}$  je tenzor napätia a  $\varepsilon_{ij}$  je tenzor pretvorenia.

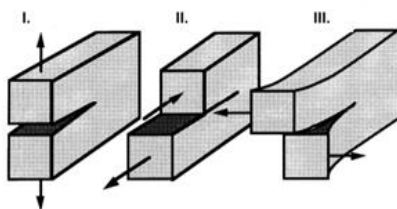
### 3.4. Súčiniteľ intenzity napätia

Táto koncepcia je najrozšírenejšou a najprepracovanejšou koncepciou, ktoré vychádza z napätia a deformácie v okolí čela trhliny. Je ju možné využívať pri statickej, ale aj dynamickej iniciácii trhliny a pri jednosmernom aj cyklickom zaťažovaní. Dôvodom vzniku a rozšírenia tejto metódy bol výskyt singularity napätia na čele trhliny, ktoré teoreticky rastie nad všetky medze (obr. č. 4).



*Obrázok číslo 4 - Priebeh napätia na čele trhliny [28-vlastné spracovanie]*

Preto bolo vhodné pre popis telesa s trhlinou zaviesť namiesto napätia nový parameter s názvom súčiniteľ intenzity napätia, ktorý dostal označenie  $K$ . Pri tejto koncepcii rozlišujeme tri základné typy namáhania telesa (zaťažovacie módy), ktoré sú závislé na charaktere zaťažovacej sily:



*Obrázok číslo 5 - Zaťažovacie módy [28-upravené]*

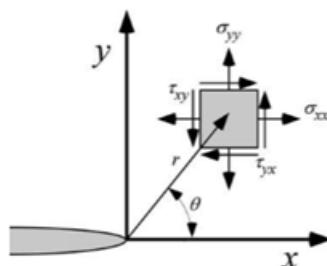
Mód I – normálové namáhanie, dochádza k vzájomnému oddiaľovaniu voľných plôch;

Mód II – šmykové namáhanie, dochádza k posunutiu povrchu v pozdĺžnom smere;

Mód III – antirovinné namáhanie, dochádza k rovnobežnému posunutiu s čelom trhliny v priečnom smere.

V praxi takmer nie je možné, aby sa tieto záťažové módy vyskytovali samostatne a skôr je možnosť stretnúť sa s ich kombináciou. Práve kombináciou všetkých troch módov je možné popísať všetky existujúce spôsoby zaťažovania telesa s trhlinou. Pokiaľ však pri danom zaťažovaní telesa existuje okrem iných aj mód I, trhlina sa bude vždy šíriť týmto módom a zvyšné dva módy budú len ovplyvňovať smer jej šírenia. Podľa typu namáhania (módu) sa mení malý index označenia  $K$ , teda súčiniteľa intenzity napätia ( $K_I, K_{II}, K_{III}$ ).

Pre popis poľa napätí v okolí čela trhliny sa využívajú nekonečné mocninové rady [1]. Zložky tenzoru sa môžu vyjadrovať v kartézskom alebo polárnom súradnicovom systéme, pričom počiatok je vždy vrchol trhliny (obr. č. 6).



*Obrázok číslo 6 - Uvoľnený jednotkový prvok na čele trhliny [28-upravené]*

Pomocou Williamsovho rozvoja je pole napätí dané vzťahom (v polárnych súradniciach) [1]:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) \cdot f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta), \quad (3.12)$$

kde  $\sigma_{ij}$  je tenzor napätia,  $r$  a  $\theta$  sú polárne súradnice,  $K$  je súčiniteľ intenzity napätia a  $f_{ij}$ ,  $g_{ij}$  sú bezrozmerné funkcie uhlu  $\theta$ . Pre súradnicu  $r$  blížiacu sa nule je prvý člen rozvoja vždy výrazne väčší ako ostatné členy. Vyššie členy rozvoja potom môžeme zanedbať pre blízke okolie trhliny.

Jednotlivé zložky tenzoru napätí pôsobiace v blízkom okolí vrcholu trhliny pre módy namáhania sú [1]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta), \quad (3.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta), \quad (3.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta), \quad (3.15)$$

následne je možné využiť princíp superpozície, kde celkové pole napätí vo všeobecne zaťaženom telese má tvar [1]:

$$\sigma_{ij}^{TOTAL} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)}. \quad (3.16)$$

### 3.4.1. Metódy určovania súčiniteľa intenzity napätia

V literatúre je celé množstvo metód slúžiacich na určenie veľkosti súčiniteľa intenzity napätia pre rôzne tvary, veľkosti telesa, rôzne typy zaťaženia, odlišné typy a veľkosti trhlín. Všeobecne môžeme tieto metódy deliť na [28]:

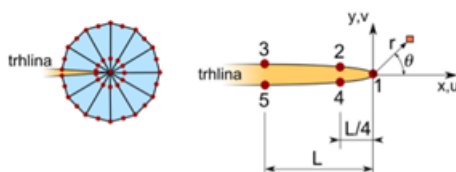
1. analytické
2. numerické
3. experimentálne
4. inžinierske

Analytické metódy je možné použiť len pre veľmi obmedzený počet jednoduchých prípadov. Experimentálne stanovenie hodnôt súčiniteľa intenzity napätia priamo súvisí s meraním poddajnosti telesa a následným určením hnacej sily trhliny alebo meraním rozovretia čela trhliny.

Pri zložitejších a komplexnejších úlohách je vhodné použiť numerické metódy určovania. Veľmi rozšíreným numerickým prístupom je využitie metódy konečných prvkov. Existuje však hneď niekoľko spôsobov numerického výpočtu veľkosti súčiniteľa intenzity napätia [3,1]. V ďalších častiach tejto diplomovej práce budú prakticky použité niektoré z týchto numerických metód, a preto je potrebné ich aj podrobnejšie vysvetliť.

### **Metóda určenia súčiniteľa intenzity napätia pomocou špeciálnych trhlinových prvkov [3]**

Tento postup je rozšírený v komerčných MKP výpočtových softvéroch. Pre výpočet hodnoty súčiniteľa intenzity napätia sa využívajú špeciálne trhlinové prvky, ktoré sú vytvorené v okolí čela trhliny. Tieto trhlinové prvky majú posunuté stredové uzly do  $\frac{1}{4}$  dĺžky prvku, čím modelujú singularitu napätia (viď. obr. č. 4).



*Obrázok číslo 7 - Trhlinové prvky [26]*

Súčiniteľ intenzity napätia pre prvé dva záťažové módy je potom počítaný z posuvov jednotlivých uzlov na lícach trhliny pomocou nasledujúcich vzťahov [3]:

$$K_I = \frac{E}{3 \cdot (1 + \mu) \cdot (1 + \kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4 \cdot (v_2 - v_4) - \frac{(v_3 - v_5)}{2} \right], \quad (3.17)$$

$$K_{II} = \frac{E}{3 \cdot (1 + \mu) \cdot (1 + \kappa)} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4 \cdot (u_2 - u_4) - \frac{(u_3 - u_5)}{2} \right], \quad (3.18)$$

kde  $E$  je modul pružnosti v ťahu použitého materiálu,  $L$  je vzdialenosť krajných uzlov prvku od čela trhliny,  $u$  a  $v$  sú posuvy odpovedajúcich uzlov v daných smeroch (obr. č. 7).

Parameter  $\kappa$  je definovaný pre rovinnú napätosť:

$$\kappa = 3 - 4 \cdot \mu \quad (3.19)$$

a pre rovinnú deformáciu:

$$\kappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}, \quad (3.20)$$

pričom  $\mu$  je Poissonov pomer použitého materiálu.

Túto metódu je možné použiť v systéme ANSYS pomocou príkazu KCALC, ktorý dopočíta hodnoty súčiniteľov intenzity napätí pre všetky tri módy. Predtým je však potrebné definovať trhlínové prvky a posunutie uzlových bodov pomocou príkazu KSCON a vytvoriť lokálny súradnicový systém na čele trhliny.

Táto metóda je vhodná najmä pri kombinovanom namáhaní telesa s trhlinou, kedy umožňuje jednoduché určenie súčiniteľa intenzity napätia. Veľkou nevýhodou je, že je nutné vopred manuálne stanoviť charakter napätosti (rovinnú deformáciu alebo napätosť) v uvažovanom mieste telesa. To môže byť častokrát problematické, hlavne pri trojdimenzionálnej úlohe.

### **Priama metóda určenia súčiniteľa intenzity napätia [1]**

Ďalšou metódou na určenie súčiniteľa intenzity napätia je takzvaná priama metóda. Tá používa definičný vzťah pre jednoparametrový popis poľa napätia v okolí čela trhliny. Pre mód I je v tvare [1]:

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{5}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (3.21)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (3.22)$$

$$\tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]. \quad (3.23)$$

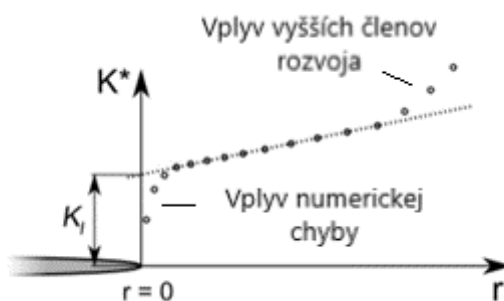
Pokiaľ budeme uvažovať súradnicový systém na čele trhliny zobrazený na obrázku číslo 6, tak pre uhol  $\theta = 0$  môžeme otváracie napätie definovať ako:

$$\sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{K_I^*(r)}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (3.24)$$

Po úprave tejto rovnice získame vzťah pre výpočet súčiniteľa intenzity napätia pre mód I:

$$K_I^* = \sigma_{\theta\theta}(r)\sqrt{2\pi r}. \quad (3.25)$$

Pomocou numerického výpočtu v komerčnom softvéri je možné určiť napätie  $\sigma_{\theta\theta}$  v bodoch rôzne vzdialených od čela trhliny. Tie sa následne pomocou rovnice číslo 3.25 prepočítajú na hodnoty súčiniteľa intenzity napätia, čím sa získa závislosť  $K_I$  na  $r$  (vzdialenosť od čela trhliny). Potom sa použitím lineárnej regresie [24] dopočíta výsledný súčiniteľ intenzity napätia  $K_I$ . Príklad takéhoto postupu je na obrázku číslo 8. Hodnoty  $K_I$  v tesnej blízkosti čela trhliny sú ovplyvnené numerickou chybou [30], a preto je potrebné ich z množiny pre lineárnu regresiu vynechať [2]. Pre väčšiu vzdialenosť od čela trhliny je zas viditeľný vplyv vyšších členov rozvoja, ktoré vo výpočte nebudú takisto použité.



**Obrázok číslo 8 - Priebeh faktoru intenzity napätia [26 - upravené]**

Rovnakým spôsobom je možné získať aj súčiniteľ intenzity napätia pre mód II. Je však potrebné nahradiť napätie  $\sigma_{\theta\theta}$  napätím  $\tau_{r\theta}$ .

Výhodou priamej metódy je možnosť jej využitia aj pre výpočet trojdimenzionálneho telesa, kde dochádza k prirodzenému prechodu z rovinnej napätosti do rovinnej deformácie. Manuálne je takmer nemožné tento prechod presne určiť, preto je veľkým benefitom tejto metódy, že nevyžaduje predpísanie tejto podmienky.



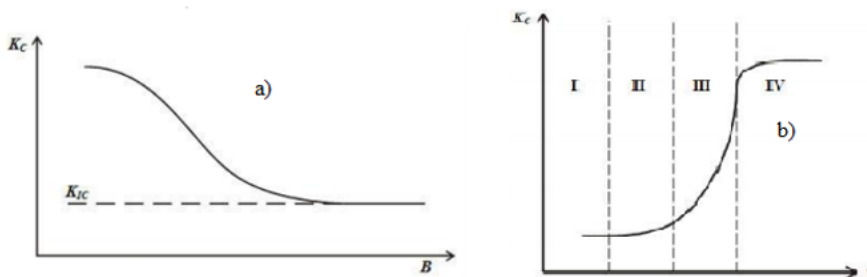
Nevýhodou priamej metódy je komplikované určenie minimálnej a maximálnej vzdialenosti od čela trhliny, pre ktoré sa berú hodnoty napätí do lineárnej regresie na výpočet súčiniteľa intenzity napätia. Rovnako náročné je zabezpečiť dostatočne jemnú sieť konečných prvkov v okolí čela trhliny, ktorá následne negatívne ovplyvňuje výpočtový čas. Je nutné dodať, že výpočet pomocou priamej metódy neposkytuje žiadny komerčný softvér, a preto je nutné, aby si ho užívateľ sám naprogramoval.

### 3.5. Lomová húževnatosť

Lomová húževnatosť je materiálová charakteristika, ktorá sa vo väčšine prípadov určuje experimentálne. Vyjadruje odpor materiálu proti šíreniu trhliny. Charakterizovaná môže byť hodnotou jedného parametra húževnatosti ako napríklad:  $K_{IC}$ ,  $\delta_c$ ,  $J_{IC}$ . Môže ju však popisovať aj závislosť určitého parametra na prírastku dĺžky trhliny. Pri krátkych dĺžkach trhlín dochádza k vzniku veľkej plastickej zóny na čele trhliny, čím sa porušujú predpoklady platnosti tejto koncepcie. Pre možnosť jej použitia je nutné splnenie nasledujúcej podmienky [28]:

$$a \geq 2,5 \cdot \left( \frac{K_{IC}}{Re} \right)^2, \quad (3.26)$$

kde  $a$  je počiatočná dĺžka trhliny,  $Re$  je medza sklzu daného materiálu a  $K_{IC}$  je lomová húževnatosť. V takých prípadoch, keď predchádzajúca podmienka nie je splnená, sa pre popis trhlín používa dvojparametrová lomová mechanika ( $T$ -napätie,  $Q$ -parameter), ktorá však v tejto diplomovej práci nebola využitá, a preto nie je bližšie špecifikovaná.



Obrázok číslo 9 - Vplyv parametrov na lomovú húževnatosť [18]

Faktorov ovplyvňujúcich lomovú húževnatosť je veľké množstvo, medzi najvýznamnejšie patria teplota, rýchlosť zaťažovania, materiál a pracovné prostredie [28].

Všeobecne je možné uviesť, že so zvyšujúcou sa teplotou a rýchlosťou zaťažovania stúpa aj hodnota lomovej húževnatosti (obr. č. 9-b). Materiálové charakteristiky, ktoré majú značný vplyv na lomovú húževnatosť sú hlavne veľkosť zrna, povrchové tepelné spracovanie a materiálová čistota (obsah síry) [28]. Na obrázku 9-a je viditeľný vplyv šírky telesa ( $B$ ) na lomovú húževnatosť.

Na základe hodnoty lomovej húževnatosti pre daný materiál je možné určiť, či sa trhlinka bude šíriť alebo nie. Pokiaľ je veľkosť súčiniteľa intenzity napätia nižšia ako hodnota lomovej húževnatosti, tak sa trhlinka nešíri. K stabilnému šíreniu trhliny dochádza pokiaľ veľkosť  $K_I$  dosiahne hodnotu  $K_{IC}$ . Nepripustný stav a teda nestabilné šírenie trhliny nastane vtedy, ak veľkosť  $K_I$  presiahne hodnotu  $K_{IC}$ .

### 3.6. Odhad smeru šírenia trhliny

Ako už bolo v práci vyššie spomínané (kap. č. 3.4), v praxi sa vo väčšine prípadov stretávame s kombináciou viacerých módov zaťažovania telesa s trhlinou. To má za dôsledok, že trajektória šírenia trhliny nie je priama, ale zakrivená. Pre správnu predikciu životnosti telesa je potrebné správne určiť nielen napäťové pole na čele trhliny, ale aj smer šírenia trhliny. V literatúre sa obvykle uvádza výpočet smeru šírenia trhliny v závislosti na kombinácii prvých dvoch módov zaťažovania I a II. Ak je teda známa veľkosť súčiniteľov napätí pre oba tieto módy, potom je možné predikovať smer šírenia trhliny. Jedným z najčastejšie používaných kritérií pre odhad smeru šírenia trhliny je kritérium maximálnych tangenciálnych napätí, skrátene MTS kritérium [10,11,31].

Ako vyplýva už z názvu, kritérium MTS predpokladá smer šírenia trhliny do miest s najväčším tangenciálnym napätím  $\sigma_{\theta\theta}$ . Toto napätie je možné vyjadriť pomocou prvého člena Williamsovho rozvoja [32]:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[ K_I \cos^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right]. \quad (3.27)$$

Tangenciálne napätie dosiahne svoje maximum, pokiaľ sú splnené podmienky:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0 \cap \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0, \text{ pre } \theta = \theta_0. \quad (3.28)$$

Po aplikovaní týchto podmienok a viacerých úpravách rovnice číslo 3.27, je vzťah pre výpočet uhla šírenia trhliny v tvare:

$$\theta_0 = 2 \arctg \left( \frac{K_I}{4K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right). \quad (3.29)$$

O znamienku  $\pm$  rozhodujú napríklad posuvy uzlov číslo 2 a 4 v smere osy  $x$  (viď obr. č. 7). Výhodou MTS kritéria je jeho jednoduchosť v použití a pomerne vysoká presnosť. Inou možnosťou ako definovať uhol šírenia trhliny je napríklad určiť z priebehu  $\sigma_{\theta\theta}$  pre konštantnú súradnicu  $r$  jeho maximum [23]. To môže byť použité ako lomové kritérium zalomenia trhliny.

### 3.7. Subkritický rast trhlín

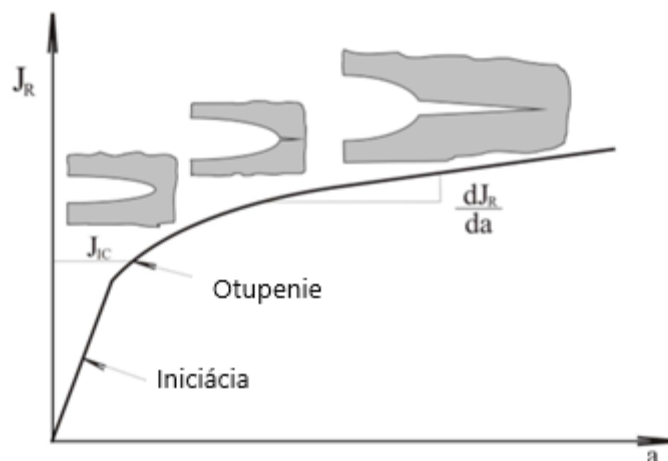
V kapitole číslo 3.5 bol bližšie vysvetlený princíp posudzovania telies s trhlinou na základe súčiniteľa intenzity napätia, ktorý popisoval, že trhlina sa bude šíriť len za predpokladu, že hodnota  $K_I$  dosiahne kritickú hodnotu  $K_{IC}$ . V praxi sa však v minulosti inžinieri stretli aj s prípadmi, keď dochádzalo k rastu trhliny aj pri hodnotách súčiniteľa intenzity napätia nižších ako bola stanovená veľkosť lomovej húževnatosti. Ďalším skúmaním bolo zistené, že sa tak deje v dôsledku okolitých vplyvov na teleso s trhlinou. Na základe toho vznikol pojem subkritický rast trhliny. Je to časovo závislý mechanizmus šírenia trhliny, ktorý sa na základe prevádzkových podmienok delí do základných skupín [28]:

1. únavový rast trhlín – vzniká v dôsledku pôsobenia striedavých napätí
2. korózný rast trhlín – podmienkou je agresívne (korózne) prostredie
3. creepový rast trhlín – pri statickom zaťažení telesa s trhlinou pri vysokých teplotách

V praxi je bežné, že pravidelne dochádza k viacerým kombináciám týchto podmienok, ku ktorým sa pridávajú aj mnohé ďalšie. Veľmi dôležité pri predikcii správania subkritického šírenia trhliny je popis rastu takejto necelistvosti.

Tento proces sa delí na tri základné etapy (obr. č. 10):

1. iniciácia trhliny
2. rast trhliny (môže byť popísaný pomocou R-kriviek)
3. lom



Obrázok číslo 10 - Etapy rastu trhliny [28 - upravené]

### 3.7.1. Rýchlosť šírenia trhliny pri podmienkach subkritického rastu

Pri cyklickom namáhaní sa rýchlosť šírenia trhliny za jeden cyklus počíta pomocou rozdielu súčiniteľov intenzity napätia [20]:

$$\frac{da}{dn} = C(\Delta K)^n, \quad (3.30)$$

kde  $da/dn$  je rýchlosť šírenia trhliny za 1 cyklus,  $\Delta K$  je rozdiel súčiniteľov intenzity napätia,  $C$  a  $n$  sú experimentálne určené konštanty.

Táto diplomová práca je však zameraná na šírenie trhliny pri podmienkach subkritického rastu. Rýchlosť trhliny sa v takom prípade riadi pomocou takzvaného Charlesovho pravidla [13]:

$$v = v_0 \exp\left(-\frac{H}{RT}\right) K_I^n, \quad (3.31)$$

kde  $v$  je rýchlosť trhliny,  $v_0$  a  $n$  sú konštanty,  $H$  je aktivačná entalpia,  $R$  je plynová konštanta,  $T$  je absolútna teplota a  $K_I$  je súčiniteľ intenzity napätia pre mód I.

Táto rovnica bola časom zredukovaná do zjednodušenej formy [8, 17]:

$$v = A \left( \frac{K_I}{K_{IC}} \right)^n, \quad (3.32)$$

kde  $A$  a  $n$  sú parametre subkritického rastu trhliny a  $K_{IC}$  je lomová húževnatosť.

Pri LTCC materiáloch je v mnohých prípadoch charakteristické vlhké prostredie. Vplyvom tohto vlhkého prostredia môže dochádzať k subkritickému rastu trhliny, pokiaľ hodnota  $K_I$  dosiahne na čele trhliny hodnotu v rozmedzí 0,24 – 0,27 MPa·m<sup>1/2</sup> ( $K_{th}$  – prahová hodnota) [25] a k nestabilného rastu trhliny dôjde podľa experimentálnych zistení pri prekročení hodnoty približne 0,79 MPa·m<sup>1/2</sup> ( $K_{IC}$ ) [25].

## 4. Základná teória kompozitných materiálov

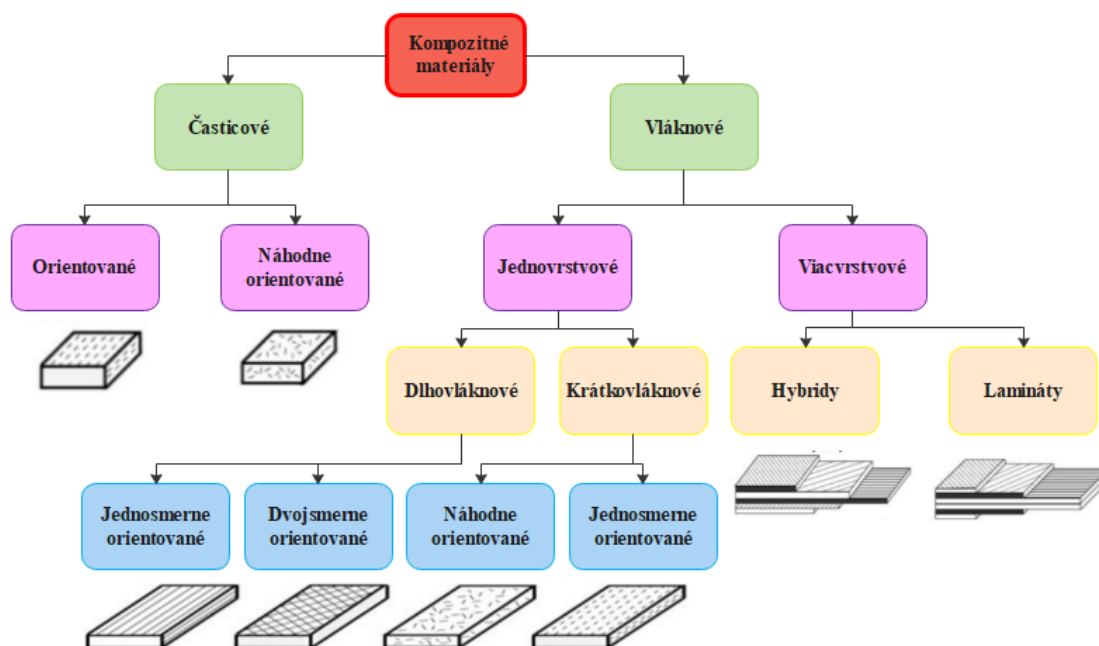
Kompozitné materiály sú materiály, ktoré sa skladajú z dvoch alebo viacerých zložiek. Každá zložka plní samostatnú funkciu a má iné materiálové vlastnosti, vo väčšine prípadov značne odlišné [29].

Dve základné časti každého kompozitu sú matrica a nosná časť (výstuž). Matrica plní spojovaciu funkciu a tvorí hlavný tvar telesa. Nosná časť alebo výstuž má významný vplyv pri konečných vlastnostiach kompozitu. Jej percentuálne zastúpenie v konečnom telese je nižšie ako pri matrici, ale má omnoho lepšie mechanické vlastnosti.

Dôvodom vzniku kompozitných materiálov je snaha o vytvorenie takého materiálu, ktorého vlastnosti budú podstatne lepšie ako vlastnosti klasických kovových materiálov. To je dosiahnuté vhodnou kombináciou jednotlivých zložiek kompozitu a použitím moderných výrobných technológií. Kompozity majú zväčša vysokú pevnosť a tuhosť, dobrú lomovú húževnatosť a sú odolné voči korózií. To všetko pri zníženej hmotnosti. Nevýhodou je ich vysoká cena a náročnosť výrobných technológií.

### 4.1. Rozdelenie kompozitných materiálov

Základné rozdelenie kompozitných materiálov je prehľadne uvedené na nasledujúcom obrázku:

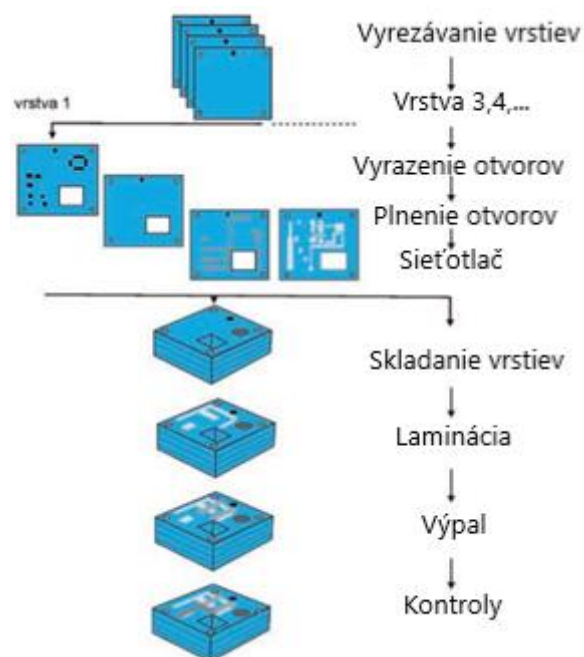


Obrázok číslo 11 - Rozdelenie kompozitných materiálov [4 - vlastné spracovanie]

## 4.2.LTCC kompozitný materiál

LTCC (Low-Temperature Co-fired Ceramics) je keramický materiál vyrábaný pri nízkych teplotách okolo 850°C. Výroba prebieha sieťotlačou pást, sušením, vypaľovaním a inými doplnkovými úpravami (viď obr. č. 12) [7]. Výhodou tejto technológie je možnosť súčasne vytvárať niekoľko vrstiev, čím sa podstatne redukuje čas potrebný na celý technologický proces a zvyšuje sa aj spoľahlivosť celej technológie.

Technológia LTCC vytvára vodivé, odporové alebo dielektrické vrstvy sieťotlačou na keramike, ktorá obsahuje 40%  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , 45%  $\text{SiO}_2$  a 15% organickej zložky [7]. Táto keramika má špecifickú vlastnosť – zmršťovanie v procese výpalu.



Obrázok číslo 12 - Spôsob výroby LTCC keramiky [7 - upravené]

Veľmi dôležitá je znalosť percentuálneho zmrštenia, kvôli zahrnutiu týchto údajov do návrhu pri vytváraní celej požadovanej štruktúry. Pritom netreba zabúdať aj na pasty, ktoré sa počas tohto procesu zmršťujú spoločne s keramikou. Technológia LTCC umožňuje vytvárať viacvrstvové štruktúry (3D štruktúry), kde do procesu vstupuje ešte laminácia. Rovnako je možné vytvárať aj netradičné štruktúry. Uplatnenie LTCC keramiky je v senzorovej technike, na mikrovlnné aplikácie, mobilnú telekomunikáciu a podobne. Rozlišovacia schopnosť je menej ako 100  $\mu\text{m}$ .

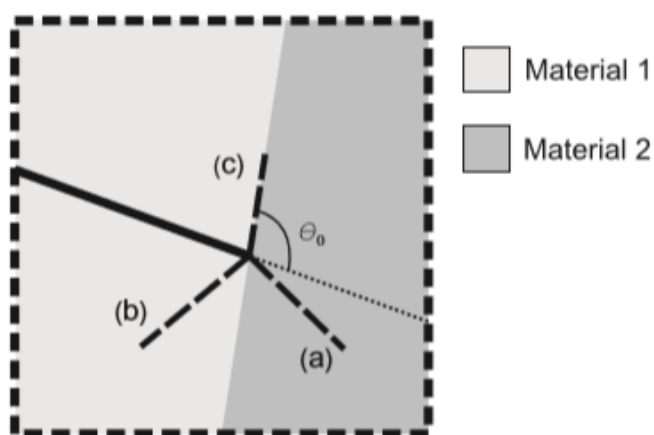
## 5. Rešerš numerického modelovania šírenia trhliny v kompozitných materiáloch

V nasledujúcej časti diplomovej práce budú stručne rozobraté predchádzajúce štúdie šírenia trhliny v kompozitných materiáloch.

### 5.1. Predikcia smeru šírenia už existujúcej trhliny

V roku 2010 M. Patricio a R. Mattheij publikovali prácu [21], v ktorej popisujú predikciu šírenia existujúcej trhliny v kompozitnom materiály. Táto práca je rozdelená na dve časti. V prvej z nich bol vytvorený algoritmus šírenia trhliny v homogénnom materiály. V druhej časti sa pomocou algoritmu modelovalo šírenie trhliny v heterogénnom materiály (kompozite).

Práca využíva určovanie smeru šírenia trhliny na základe MTS kritéria a na výpočet uhla je použitá rovnica číslo 3.29 (kap. č. 3.6). V úvode sa uvažuje krehká homogénna lineárne elastická izotropická doska pri podmienkach rovinnej napätosti. Do algoritmu sú zadané prírastok trhliny, súradnicový systém na čele trhliny a počiatočný uhol. Najprv sa spočíta statická úloha, vyhodnotia sa  $K_I$ ,  $K_{II}$ , z ktorých sa spočíta uhol šírenia trhliny. Po overení fungovania úlohy s homogénnym materiálom sa analýza rozšírila na použitie s heterogénnym kompozitným materiálom. Autori uvažujú, aké môžu nastať scenáre šírenia trhliny, pokiaľ trhlina dosiahne rozhranie dvoch materiálov:



Obrázok číslo 13 - Trhlina dosiahla rozhranie 2 materiálov [21]



Na obrázku číslo 13 je možné vidieť tri možné scenáre správania sa trhliny. Plnou čiarou je znázornená existujúca trhlina a čiarkovanou čiarou možnosť jej rastu:

- a) trhlina môže penetrovať materiálom 2;
- b) trhlina môže byť „odrazená“ späť do materiálu 1;
- c) trhlina sa môže šíriť po hranici materiálov.

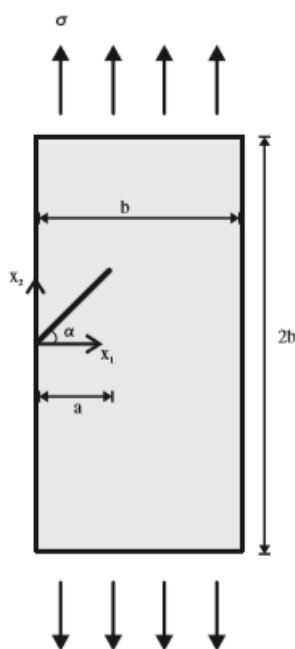
V prípade, že trhlina dosiahne hranicu 2 rôznych materiálov majú polia napätia na jej čele popis [21]:

$$\sigma_{\theta\theta}^m + i\sigma_{r\theta}^m = r^{\lambda-1}F^m(\theta, \alpha, \beta, K_I, K_{II}), \quad (5.1)$$

kde  $\sigma_{\theta\theta}^m$  je tangenciálne napätie,  $\sigma_{r\theta}^m$  je radiálne napätie,  $r$  a  $\theta$  sú polárne súradnice,  $F^m$  je komplexná funkcia,  $\alpha, \beta$  sú takzvané Dundursove bimateriálové parametre [8].

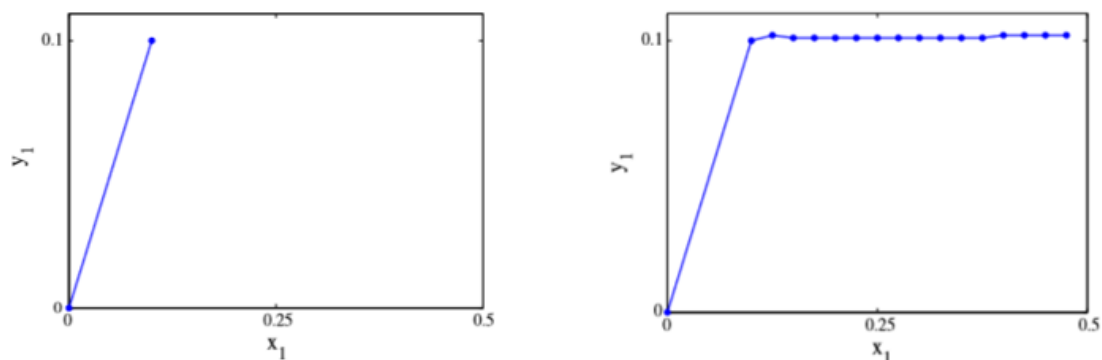
V dôsledku toho, že na rozhraní 2 materiálov je presnosť výpočtu napätí nižšia ako kdekoľvek inde [27], bola do výpočtu zavedená minimálna hodnota vzdialenosti medzi čelom trhliny a rozhraním materiálov, v ktorej autori predpokladajú presný výpočet napätia.

Pre numerické modelovanie je použitá 2D obdĺžniková geometria (strany v pomere 1:2) zaťažená prostým ťahom s počiatočnou trhlinou pod uhlom  $45^\circ$ . Okrajové podmienky pre prvý počítaný prípad s homogénnym materiálom sú:



Obrázok číslo 14 - Okrajové podmienky [21]

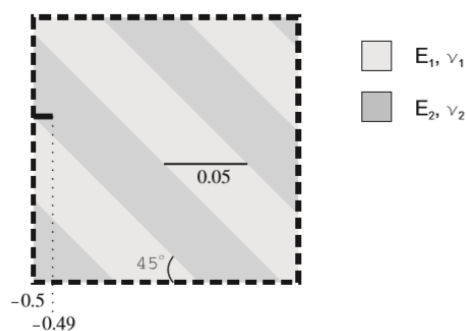
Výsledný priebeh šírenia trhliny pre 15 cyklov je znázornený na nasledujúcich obrázkoch:



**Obrázok číslo 15 - Výsledný priebeh šírenia trhliny [21]**

Vľavo na obrázku číslo 15 je znázornený počiatočný stav trhliny. Na obrázku číslo 15 vpravo je už vidieť priebeh šírenia trhliny po 15 cykloch, pričom osi predstavujú súradnice trhliny v telese. Z výsledku je možné konštatovať, že trhlina sa šírila v móde I, čo je aj predpokladom šírenia trhliny v homogénnom materiály [12].

Pri numerickom modelovaní kompozitného materiálu bola použitá geometria, ktorej vrstvy ležali pod uhlom  $45^\circ$ . Detail na model geometrie je na nasledujúcom obrázku:

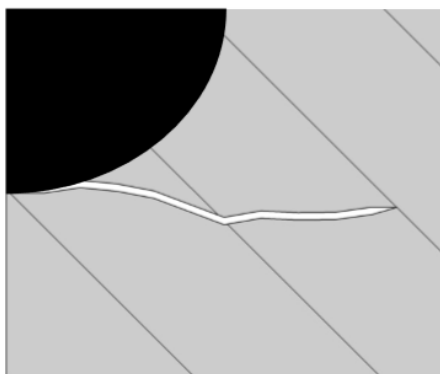


**Obrázok číslo 16 - Model geometrie [21]**

$$(E_1/E_2=1/10, \nu_1/\nu_2=1/3)$$

Kde  $E_1, E_2$  sú moduly pružnosti v ťahu a  $\nu_1, \nu_2$  sú Poissonove konštanty jednotlivých materiálov. Okrajové podmienky sú nastavené rovnako ako v prvom prípade (obr. č. 14).

Výsledný tvar trhliny:



*Obrázok číslo 17 - Výsledný tvar trhliny [21]*

Z priebehu šírenia trhliny je zjavné, že trhlina sa nešíri len v móde I, ale je ovplyvnená aj módom II, čo je spôsobené tým, že model materiálu už nie je homogénny [21].

## **5.2.Šírenie trhliny v náhodných mikroštruktúrach**

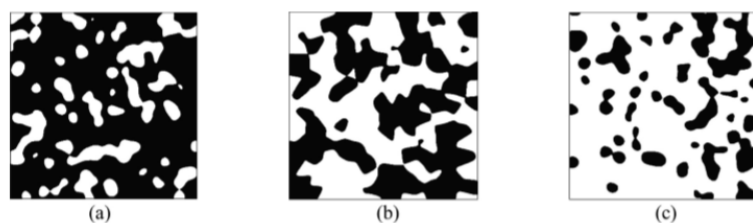
Ďalšia štúdia, ktorá bola súčasťou rešerše tejto diplomovej práce sa zaoberá šírením trhliny v kov-keramických náhodných mikroštruktúrach [14]. Autor v tejto práci využíva na generovanie modelu materiálu matematickú funkciu RMDF (random morphology description functions), ktorá sa riadi pomocou objemových podielov  $V$  a  $N$  počtom Gaussových funkcií. Úlohou RMDF funkcií je vygenerovať náhodnú konfiguráciu oboch zložiek kov-keramického kompozitného materiálu. Tento proces je v danej práci [14] dopodrobna rozobratý a pre potreby tejto diplomovej práce nie je podstatné ho bližšie špecifikovať.

Súčiniteľ intenzity napätia a trajektória šírenia trhliny sa vyhodnocujú na základe  $J$  – integrálu [28] a Paris – Erdoganovho zákona [20].

Generovaním mikroštruktúr pomocou RMDF sa definuje model materiálu dvojfázových kompozitov. Jednu fázu tvorí kovová a druhú keramická časť. Objemový podiel kovovej zložky ( $V_1$ ) je vopred zvolený a na určenie podielu keramickej zložky ( $V_2$ ) je použitá práve funkcia RMDF, pričom platí:

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (5.2)$$

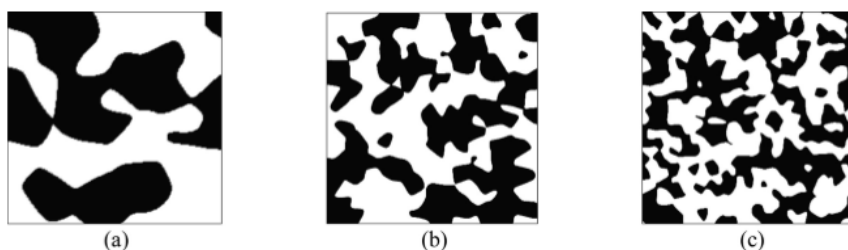
Takýmto spôsobom sú pri voľbe troch rôznych objemových podielov  $V_I$  generované tri mikroštruktúry:



**Obrázok číslo 18 - Vygenerované mikroštruktúry pre 3 rôzne  $V_I$  [14]**

a)  $V_I = 0,25$  b)  $V_I = 0,5$  a c)  $V_I = 0,75$

Druhým spôsobom generovania modelu materiálu je voľba rôzneho počtu ( $N$ ) Gaussových funkcií pri stálom objemovom podiele  $V_I = 0,5$  :



**Obrázok číslo 19 - Vygenerované mikroštruktúry pre rôzne  $N$  [14]**

a)  $N = 200$  b)  $N = 1000$  a c)  $N = 2000$

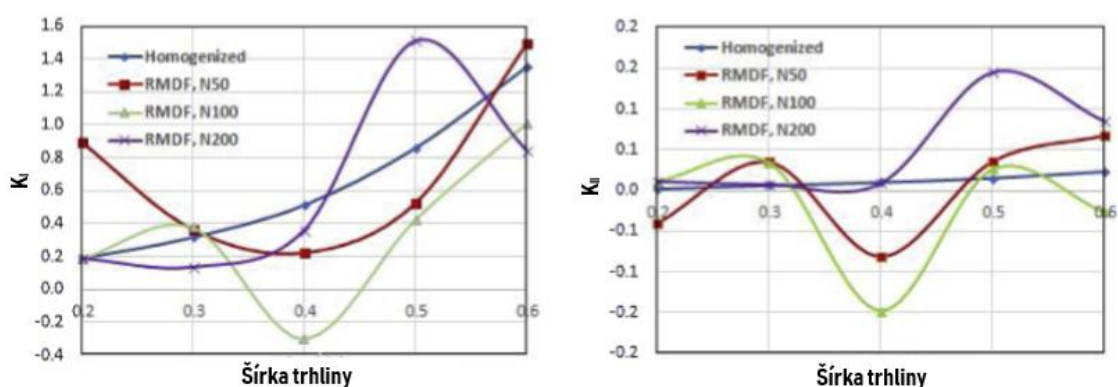
Do numerického výpočtu vstupuje model materiálu s  $V_I = 0,5$ . Model materiálu a okrajové podmienky výpočtu sú zobrazené na nasledujúcom obrázku:



**Obrázok číslo 20 - Okrajové podmienky (vľavo) a model materiálu (vpravo) [14]**

Numerické modelovanie prebieha v softvéri ANSYS a sú počítané modely materiálu vygenerované funkciou RMDF pre  $N = 50$ ,  $N = 100$  a  $N = 200$  a rovnako aj homogenizovaný model materiálu [16].

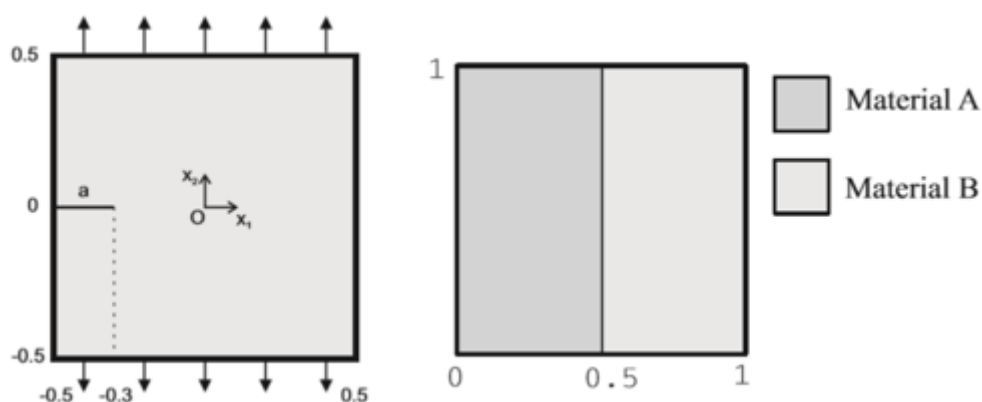
Z numerických výsledkov v práci autor došiel k záveru, že hodnoty  $K_I$  a  $K_{II}$  sú silne ovplyvnené mikroštruktúrami tak, že nevykazujú konzistentný nárast súčasne s rastom trhliny (obr. č. 21). Avšak maximálne hodnoty napätí a prírastok trhliny sú významne ovplyvnené rôznymi nastavenia počtu Gaussových funkcií  $N$ . Na základe výsledných uhlov šírenia trhliny autor konštatuje, že uhly pre RMDF modely materiálov sú takmer totožné s uhlami pre homogenizovaný model materiálu.



Obrázok číslo 21 - Priebeh súčiniteľov intenzity napätí [14 - upravené]

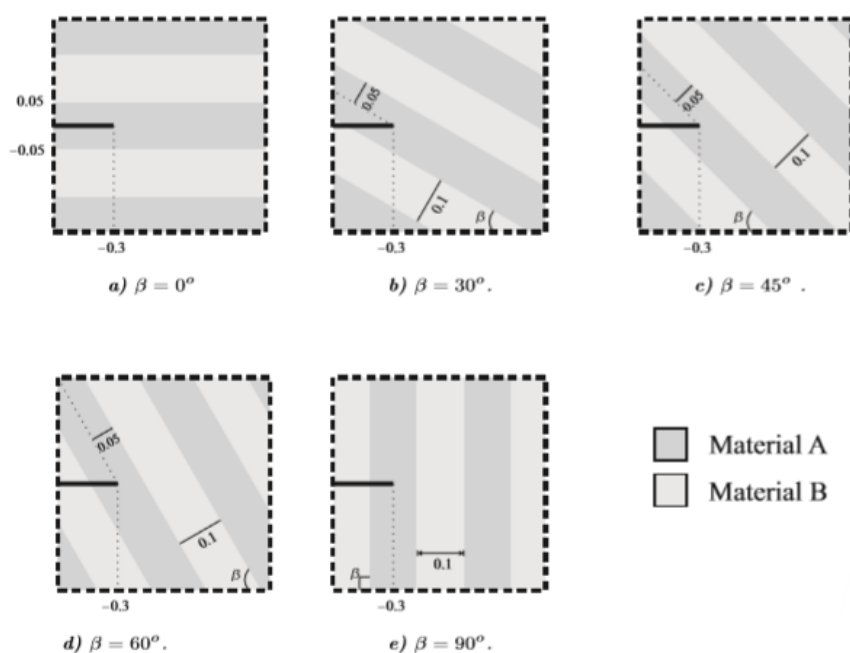
### 5.3. Vplyv lokálnej štruktúry na súčiniteľ intenzity napätia

Vo vedeckej práci z roku 2008 [22] sa skupina autorov venuje vplyvu lokálnej štruktúry na čele trhliny v periodicky usporiadanom kompozitnom materiály. V jednej z častí práce je uvažovaný nasledujúci model materiálu a geometrie:



Obrázok číslo 22 - Model geometrie (vľavo) a model materiálu (vpravo) [22 - upravené]

Materiálové vlastnosti pre 2 rôzne zložky kompozitu sú  $E_A = 10$ ,  $E_B = 1$ ,  $\nu_1 = 0,3$ ,  $\nu_2 = 0,1$ . Dve zložky kompozitného materiálu sú periodicky usporiadané rovnocenne v geometrii v rôznych konfiguráciách, pričom sa vždy mení uhol ich natočenia:



**Obrázok číslo 23 - Konfigurácie modelu geometrie [22 - upravené]**

Pre každú z konfigurácií uvedených na obrázku číslo 23 je cieľom práce použitím metódy konečných prvkov spočítať hodnoty  $K_I$  a  $K_{II}$ , rovnako ako uhol šírenia trhliny  $\theta_p$ . Pri numerickom modelovaní je použitá jemná sieť s kvadratickými trojuholníkovými elementami v tesnej blízkosti trhliny a kvadratickými štvoruholníkovými elementami vo zvyšnej časti telies. Súčinitele intenzity napätia sú určené pomocou J- integrálu (kap. č. 3.3.2) a uhol šírenia trhliny pomocou MTS kritéria (kap. č. 3.6).

Výsledné hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

*Tabuľka číslo 1 - Výsledné hodnoty  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $\theta_P$   
[22 – vlastné spracovanie]*

$\beta$	$K_I$	$K_{II}$	$\theta_P$
0°	2,20	0	0°
30°	2,13	-0,022	1,2°
45°	2,10	-0,052	2,8°
60°	2,11	-0,082	4,4°
90°	2,13	0	0°

Pre porovnanie sa v práci uvádza aj prípad pokiaľ by konfigurácia materiálov v telesách bola opačná, a teda ak by čelo trhliny v počiatočnom stave začínalo v materiály B. Výsledné hodnoty tohto prípadu sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

*Tabuľka číslo 2 - Výsledné hodnoty  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $\theta_P$   
pre prípad obráteného usporiadania materiálov A,B [22 – vlastné spracovanie]*

$\beta$	$K_I$	$K_{II}$	$\theta_P$
0°	0,816	0	0°
30°	0,775	0,072	-10,4°
45°	0,710	0,107	-16,4°
60°	0,624	0,121	-20,5°
90°	0,539	0	0°

Autori tohto vedeckého článku interpretujú uvedené výsledky svojich výpočtov tak, že súčinitele intenzity napätia sú veľmi citlivé na lokálne charakteristiky blízkeho okolia čela trhliny. Preto je veľmi dôležité poznať a správne určiť vlastnosti tohto okolia pri snahe dosiahnuť čo najlepšiu aproximáciu hodnôt  $K_I$ ,  $K_{II}$  [22].

## 6. Realizácia numerického modelovania

Ako metóda riešenia bola zvolená metóda konečných prvkov (MKP) v prostredí softvéru ANSYS Mechanical APDL, konkrétne verzii 19.2. Pre výber tohto softvéru rozhodovali programová vybavenosť pracoviska, rovnako tak získané vedomosti a znalosti nadobudnuté počas štúdia. Všetky výpočty boli vykonané na počítači s procesorom Intel® Core™ i9-7900X CPU @ 3.30GHz a veľkosťou RAM 128 GB.

V diplomovej práci bol zvolený nasledujúci postup riešenia:

- vytvorenie 2D modelu, v ktorom sú použité rovnaké materiálové vlastnosti pre obe zložky kompozitu pre overenie správnosti numerického výpočtu s analytickým riešením;
- vytvorenie 2D modelu šírenia trhliny v kompozitnom telese, kvôli nadobudnutiu určitých skúseností pred tvorbou zložitejších modelov;
- vytvorenie 3D modelu s valcovou časticou pre porovnanie výsledkov 2D a 3D riešenia a overenia správnosti použitia priamej metódy;
- vytvorenie 3D modelu s guľovou časticou pre porovnanie životnosti modelu s valcovou časticou, guľovou časticou a 2D modelom.

Pre šírenie trhliny vo všetkých počítaných príkladoch bol na úvod každého výpočtového súboru vytvorený základný model materiálu a model geometrie s počiatočnou dĺžkou trhliny. Nasledoval výpočet po prvotnom zaťažení telesa, na konci ktorého boli na čele trhliny dopočítané prvé hodnoty súčiniteľa intenzity napätí. Následne bol v každom počítanom prípade použitý cyklus vytvorený pomocou príkazu \*DO. Tento cyklus sa skladal vždy z nasledujúcich krokov:

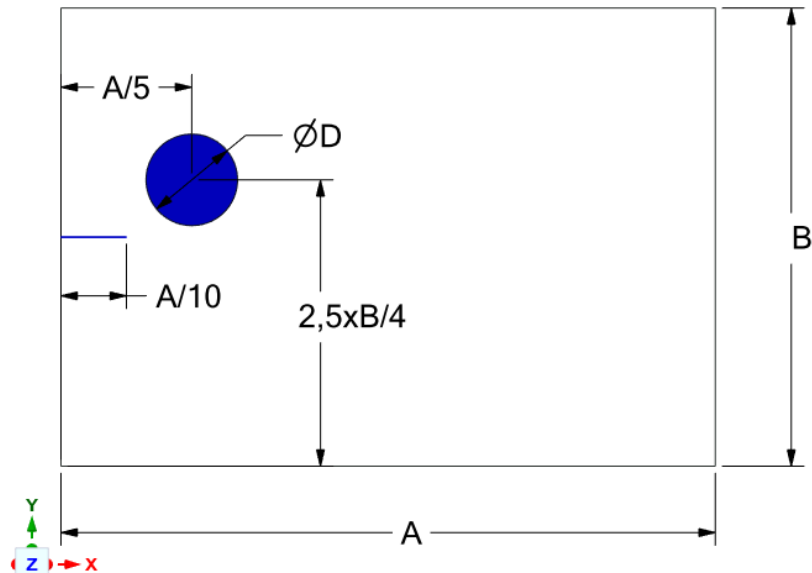
- výpočet uhla šírenia trhliny na základe hodnôt súčiniteľa intenzity napätia  $K_I$ ,  $K_{II}$ ;
- zmazanie siete konečných prvkov, plôch, prípadne objemov;
- vytvorenie nových trhlinových plôch a nových objemov;
- vytvorenie novej siete konečných prvkov;
- nový výpočet s pôvodným zaťažením a okrajovými podmienkami;
- výpočet hodnôt súčiniteľa intenzity napätia  $K_I$ ,  $K_{II}$  na čele trhliny.

Pomocou takéhoto cyklu bolo zautomatizované samostatné šírenie trhliny v telese.



## 6.1. Úloha 2D

Pri riešení 2D úlohy šírenia trhliny v kompozitnom telese bol vytvorený nasledujúci model geometrie:



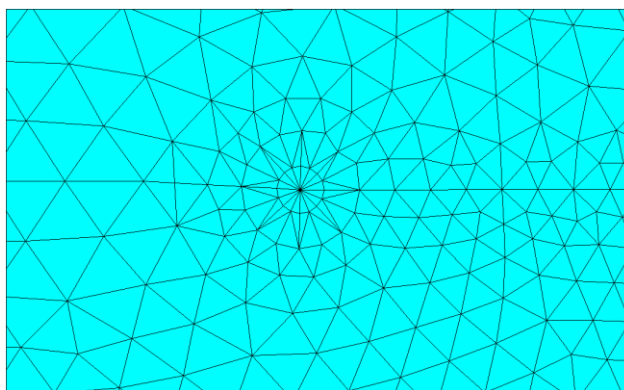
Obrázok číslo 24 - Model geometrie pre 2D úlohu

( $A=10\text{mm}$ ,  $B=7\text{mm}$ ,  $\varnothing D=1,4\text{mm}$ )

Počiatočná veľkosť trhliny bola 1 mm, veľkosť a poloha častice je viditeľná na obrázku číslo 24. V prípade 2D úlohy modelovaná častica predstavuje nekonečne dlhú vláknovú časticu v kompozite (rovinná deformácia).

### 6.1.1. Tvorba siete konečných prvkov

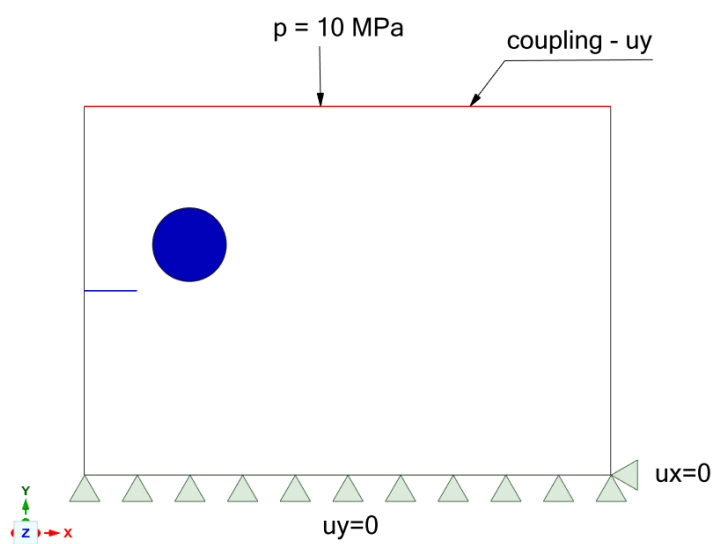
Sieť konečných prvkov má pri numerických výpočtoch zásadný vplyv na presnosť riešenia. Pri úlohách lomovej mechaniky je najdôležitejšie vytvorenie jemnej a kvalitnej siete v okolí čela trhliny. Rovnako je podstatné zabezpečiť jemnosť siete v miestach predpokladaného šírenia trhliny. Pri výpočte boli použité kvadratické prvky typu PLANE 183, ktorý má zväčša 8 alebo 6 uzlov. Približný celkový počet prvkov bol 66 tisíc.



*Obrázok číslo 25 - Detail siete konečných prvkov*

### 6.1.2. Okrajové podmienky

Okrajové podmienky spolu so zaťažením boli navrhnuté takým spôsobom, aby simulovali skúšku jednoosím ťahom. To znamená, že na spodnú hranu modelu bola aplikovaná podmienka symetrie v smere osi  $y$ . Vrchná hrana bola zaťažená ťahovým napätím a na uzly na tejto hrane bol použitý coupling. Ten zabezpečil spoločný posuv všetkých uzlov, čo je predpokladom ťahovej skúšky. Ako posledný bol v uzle, ktorý leží v pravom dolnom rohu telesa, zamedzený posuv v ose  $x$ , čím bol model plne izolovaný v priestore. To je nutná podmienka realizácie výpočtu. Úloha bola riešená pri podmienkach rovinnej deformácie. Pre lepšiu predstavu sú okrajové podmienky znázornené na nasledujúcom obrázku:



*Obrázok číslo 26 - OP pre 2D úlohu*

### 6.1.3. Overenie správnosti výpočtu súčiniteľa intenzity napätia

Ešte pred prvým modelovaním šírenia trhliny v kompozitnom materiály bolo prístupné k modelovaniu šírenia trhliny v telese, kde sa použili rovnaké materiálové vlastnosti pre obe zložky kompozitu (tab. č. 3). Na tomto príklade je možné overiť hodnoty súčiniteľa intenzity napätia získané numerickým modelovaním s analyticky vypočítanou hodnotou.

*Tabuľka číslo 3- Model materiálu*

	<b>vlákno</b>	<b>matrica</b>
<b>E [MPa]</b>	210000	210000
<b>μ [-]</b>	0,3	0,3

#### **Analytický výpočet súčiniteľa intenzity napätia**

Pri počiatkovej dĺžke trhliny 1 mm a ťahovom zaťažení hornej hrany o veľkosti 10 MPa je analytický výpočet súčiniteľa intenzity napätia v homogénnom materiály pre nekonečnú dosku [1]:

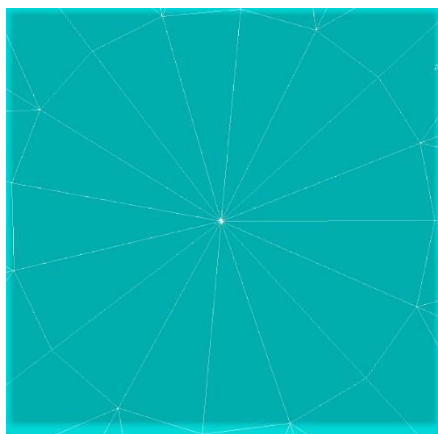
$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot a} = 10 \cdot \sqrt{3,14 \cdot 0,001} = 0,56 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.1)$$

Táto hodnota bude využitá ako vzťažná hodnota na kontrolu presnosti numerických výpočtov.

Na numerický výpočet súčiniteľa intenzity napätia boli využité dva spôsoby. Prvým je použitie trhlínových prvkov a druhým je použitie priamej metódy (kap 3.4.1).

#### **Súčiniteľ intenzity napätia pomocou trhlínových prvkov**

V 2D úlohách ide o najpoužívanějších spôsob výpočtu šírenia trhliny. Pred samotným výpočtom je nutné použiť príkaz KSCON, ktorý vytvára tieto trhlínové prvky a umožňuje užívateľovi nastaviť, v ktorom bode sa nachádza čelo trhliny a koľko trhlínových elementov bude vytvorených. Na obrázku číslo 27 sú zobrazené použité trhlínové prvky.



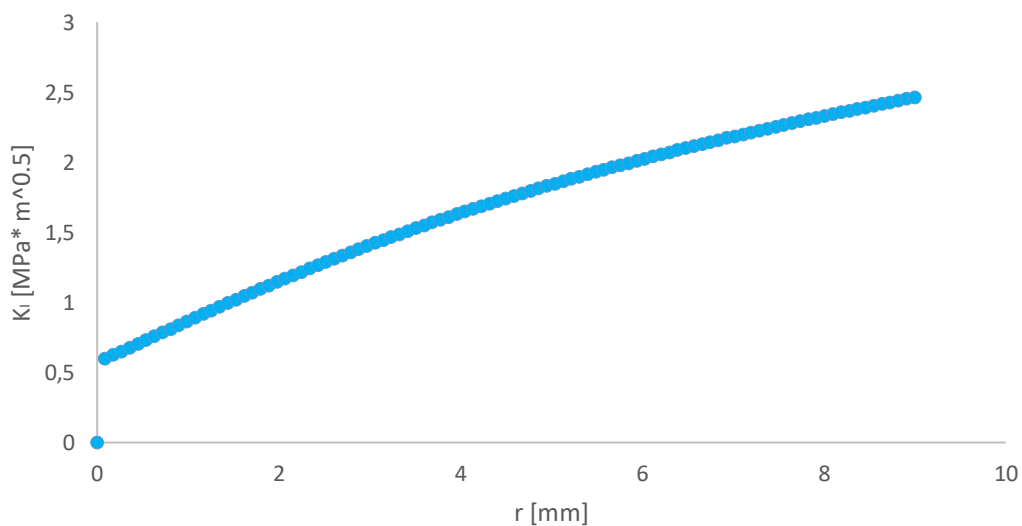
*Obrázok číslo 27 - Trhlinové prvky*

Súčiniteľ intenzity napätia použitím trhlinových prvkov nadobudol hodnotu:

$$K_I = 0,58 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}} \quad (6.2)$$

### **Súčiniteľ intenzity napätia pomocou priamej metódy**

Použitie tejto metódy je pomerne zložité a jej podrobný popis sa nachádza v kapitole číslo 3.4.1. Pomocou funkcie PATH sa z uzlov vedúcich od čela trhliny až ku koncu telesa získali hodnoty napätia v smere osi y (rovnica č. 3.24), ktoré sa použili na výpočet hodnôt  $K_I$  (rovnica č. 3.25). Výsledné hodnoty v závislosti na vzdialenosti od čela trhliny je možné vidieť na nasledujúcom obrázku:



*Obrázok číslo 28 - Priebeh  $K_I$  po celou hrúbke telesa*

Pomocou lineárnej regresie sa hodnota súčiniteľa intenzity napätia vypočíta pomocou vzťahu [23]:

$$K_I = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad (6.3)$$

kde  $x$  je v tomto prípade vzdialenosť od čela trhliny ( $r$ ) a  $y$  je hodnota  $K_I$  v konkrétnom bode.

V tomto prípade  $K_I$  dosiahlo hodnotu:

$$K_I = 0,57 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

Porovnanie výsledkov súčiniteľa intenzity napätia dopočítaného tromi použitými metódami je prehľadne uvedené v nasledujúcej tabuľke:

*Tabuľka číslo 4 - Porovnanie výsledkov  $K_I$*

	<b>analytický</b>	<b>trhlinové prvky</b>	<b>priama metóda</b>
<b><math>K_I</math> [MPa · m<sup>1/2</sup>]</b>	0,56	0,58	0,57
<b>Odchýlka [%]</b>	-	3,6	1,8

Analytická hodnota  $K_I$  bola vzťažnou pri výpočte odchýlok ostatných metód. Z výsledkov je možné konštatovať, že obe použité numerické metódy vykazujú zanedbateľné rozdiely od analytického riešenia. Preto nie je problém ich využiť aj pri ďalších výpočtoch.

#### **6.1.4. Riešenie 2D úlohy vláknového kompozitu**

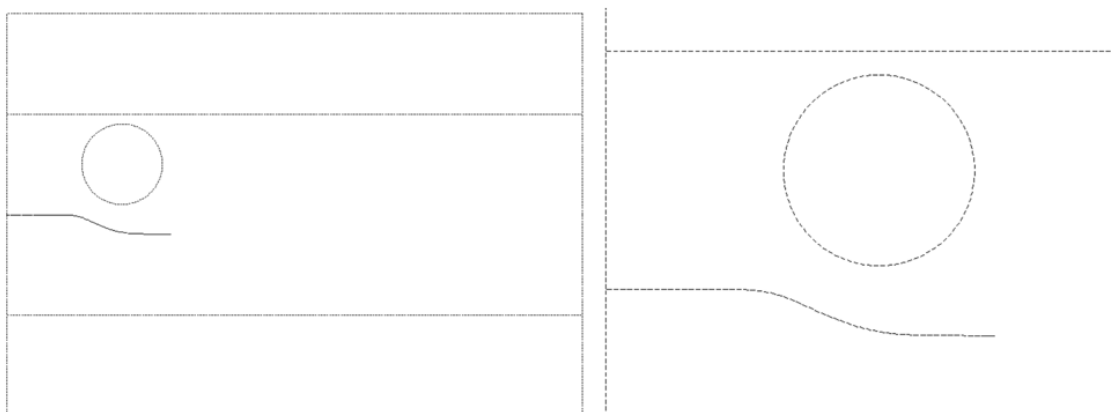
Model geometrie pri riešení tejto úlohy bol totožný s tým, ktorý je zobrazený na obrázku číslo 24. Použité boli aj rovnaké nastavenia siete konečných prvkov ako v predchádzajúcom prípade, k zmene došlo len v modeli materiálu:

*Tabuľka číslo 5 - Model materiálu*

	<b>vlákno</b>	<b>matrica</b>
<b>E [MPa]</b>	300000	70000
<b><math>\mu</math> [-]</b>	0,29	0,17

Okrajové podmienky zostali rovnako nezmenené (obr. č. 26). Počítaných bolo 20 cyklov. Pri každom cykle bol prírastok trhliny 0,1 mm. Výpočtový čas jedného cyklu bol približne 30 sekúnd.

Výsledný priebeh trhliny potom bol:



*Obrázok číslo 29 - Výsledný tvar trhliny*

Výsledné hodnoty súčiniteľa intenzity napätia pre každý druhý vypočítaný cyklus sú uvedené v nasledujúcich tabuľkách:

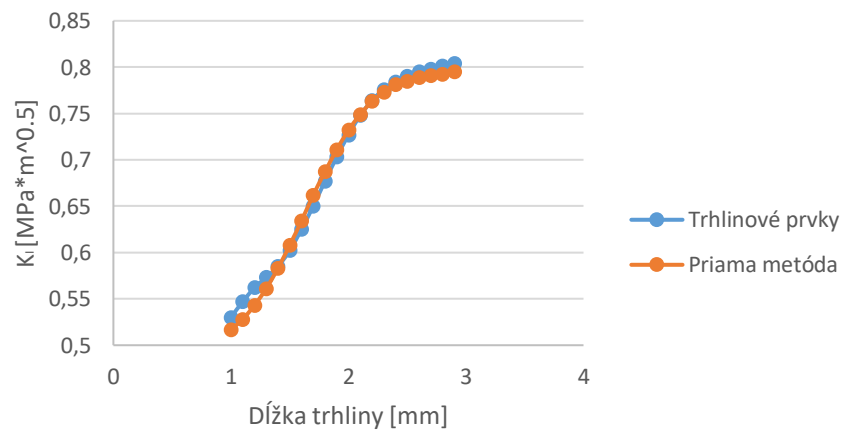
*Tabuľka číslo 6 - Výsledné hodnoty  $K_I$  pre 2D model*

Dĺžka trhliny [mm]	$K_I$ - Trhlinové prvky [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - Priama metóda [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	Odchýlka [%]
1	0,530	0,517	2,5
1,2	0,562	0,543	3,4
1,4	0,585	0,583	0,3
1,6	0,625	0,634	-1,4
1,8	0,677	0,687	-1,5
2	0,727	0,732	-0,7
2,2	0,764	0,763	0,1
2,4	0,784	0,781	0,4
2,6	0,795	0,789	0,8
2,8	0,801	0,792	1,1

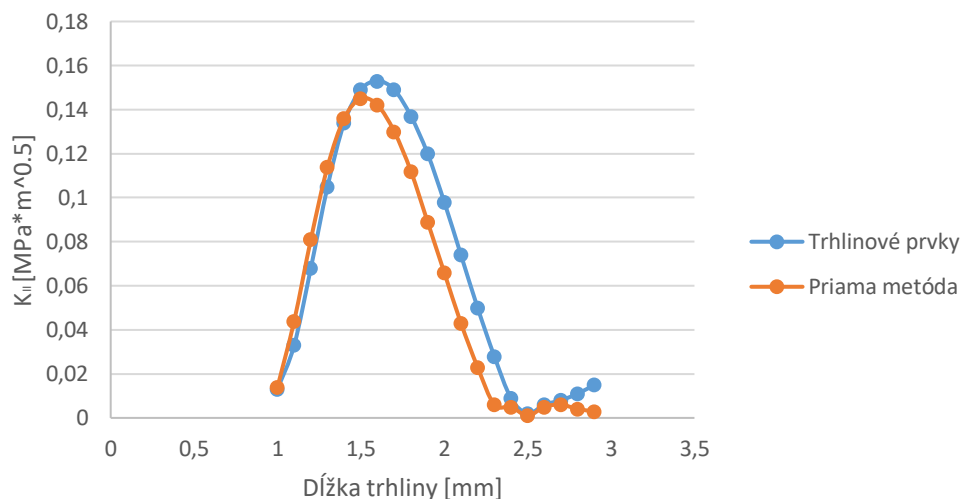
*Tabuľka číslo 7 - Výsledné hodnoty  $K_{II}$  pre 2D*

Dĺžka trhliny [mm]	$K_{II}$ - Trhlinové prvky [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - Priama metóda [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	Odchýlka [%]
1	0,013	0,014	-7,7
1,2	0,068	0,081	-19,1
1,4	0,134	0,136	-1,5
1,6	0,153	0,142	7,2
1,8	0,137	0,112	18,2
2	0,098	0,066	32,7
2,2	0,050	0,023	54,0
2,4	0,009	0,005	44,4
2,6	0,006	0,005	16,7
2,8	0,011	0,004	63,6

Dôležitý je aj pohľad na priebeh oboch týchto spočítaných veličín počas rastu trhliny. Ten je zobrazený na nasledujúcich grafoch:



*Obrázok číslo 30 - Priebeh  $K_I$  pre 2D prípad*



**Obrázok číslo 31 - Priebeh  $K_{II}$  pre 2D prípad**

Z obrázkov 30 a 31 je jasne viditeľný rovnaký trend súčiniteľov intenzity napätí  $K_I$ ,  $K_{II}$  pre obe spočítané metódy. Rozdiel v číselných hodnotách môže byť spôsobený numerickou chybou pri výpočte pomocou lineárnej regresie, pri ktorej ide predsa len o zjednodušenie.

Do výpočtu  $K_{II}$  sa vnáša chyba tým, že sa vopred volí hodnota prírastku trhliny, a preto je vidieť väčšie odchýlky ako pre  $K_I$ . Avšak aj v tomto prípade má závislosť  $K_{II}$  na dĺžke trhliny rovnaký trend pre obe spočítané metódy. Pri metóde s použitím trhlinových prvkov dosahuje  $K_{II}$  o niečo vyššie hodnoty.

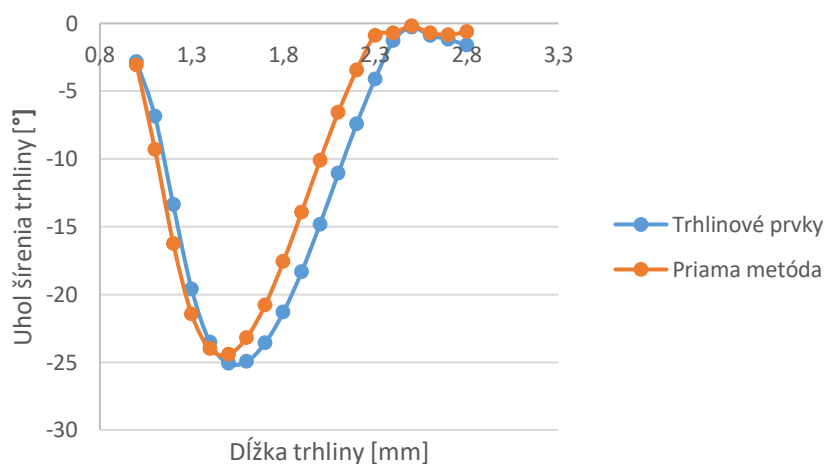
Rovnaký výsledok je možné sledovať aj pri uhloch spočítaných pomocou kritéria MTS (kap. 3.6):

**Tabuľka číslo 8 - Porovnanie výpočtu uhlov pre 2D úlohu**

Dĺžka trhliny [mm]	Uhol - Trhlinové prvky [°]	Uhol - Priama metóda [°]	Odchýlka [%]
1	-2,82	-3,06	-8,5
1,2	-13,40	-16,24	-21,2
1,4	-23,54	-24,03	-2,1
1,6	-24,96	-23,20	7,1
1,8	-21,33	-17,60	17,5
2	-14,82	-10,12	31,7
2,2	-7,43	-3,45	53,6
2,4	-1,29	-0,71	45,0
2,6	-0,89	-0,71	20,2
2,8	-1,63	-0,63	61,3



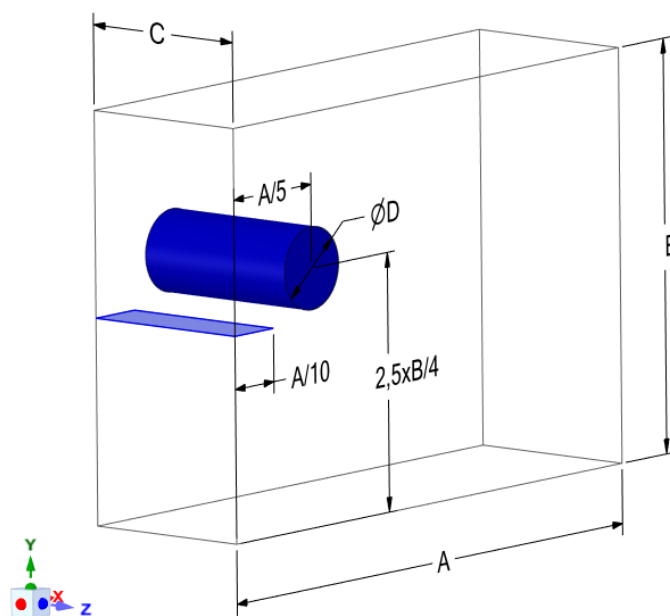
Odchýlka číselných hodnôt uhlov pre obe metódy priamo súvisí s odchýlkou výsledkov pre  $K_{II}$ . Badateľný je rovnaký priebeh pre obe spočítané metódy (obr. č. 32). Vyššie hodnoty  $K_{II}$  pri metóde s trhlínovými prvkami spôsobujú aj vyššie hodnoty uhlov. Napriek tomuto malému rozdielu je trend vývoja uhlov šíriacej sa trhliny pre obe metódy totožný.



Obrázok číslo 32 - Priebeh uhlu šírenia trhliny

## 6.2. Úloha 3D valcová častica

Pri riešení 3D úlohy kompozitného telesa s valcovou časticou bola použitá nasledujúca geometria:



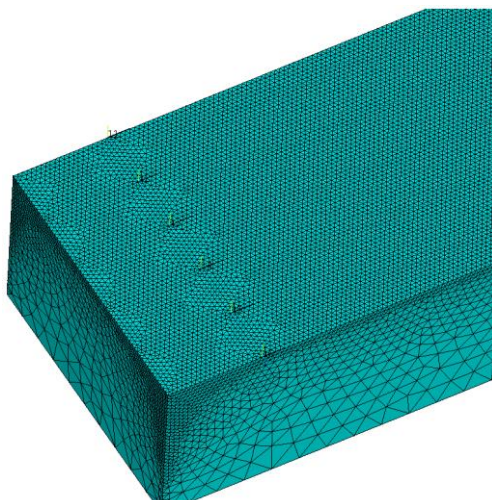
Obrázok číslo 33 - Model geometrie pre 3D úlohu valcovej častice

( $A=10\text{mm}$ ,  $B=7\text{mm}$ ,  $\varnothing D=1,4\text{mm}$ ,  $C=3\text{mm}$ )

Počiatočná dĺžka trhliny bola zvolená obdobne ako pri 2D úlohe 1 mm, rovnako ako priemer a poloha častice. Šírka modelu bola 3 mm (vid'. obr. č. 33).

#### **6.2.1. Tvorba siete konečných prvkov**

Sieť konečných prvkov bola vytvorená z elementov typu SOLID 185. Jedná sa o kvadratický prvok tvorený 8 uzlami, z ktorých každý má 3 stupne voľnosti (UX, UY, UZ). Pri tvorbe samotnej siete bolo veľmi podstatné dbať na veľmi jemnú sieť v okolí čela trhliny, zatiaľ čo vo väčšej vzdialenosti už mohol model obsahovať aj hrubšiu sieť. Napriek tomu bol počet prvkov pri jednotlivých výpočtoch približne 2 milióny.

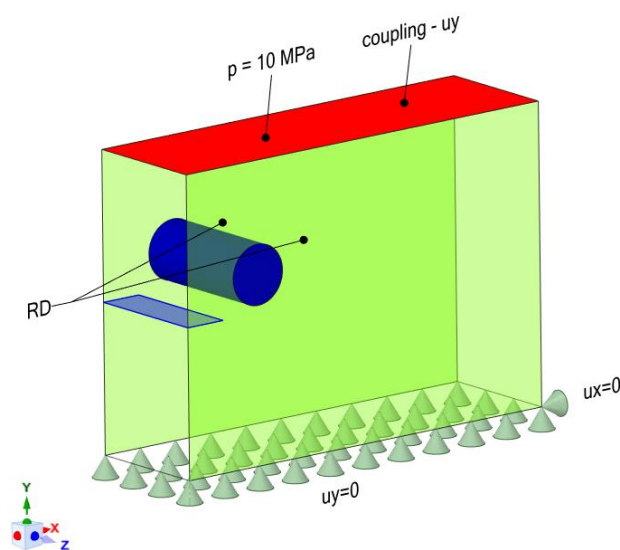


*Obrázok číslo 34 - Detail na sieť konečných prvkov*

#### **6.2.2. Okrajové podmienky**

Okrajové podmienky boli aplikované tak, aby simulovali skúšku jednoosím ťahom. Na vrchnú plochu bolo aplikované ťahové napätie rovnako veľké ako v predchádzajúcej úlohe - 10 MPa. Na spodnej ploche bola zavedená symetria v ose  $y$ . Na oboch čelných stenách (10x7mm) bola uvažovaná podmienka rovinnej deformácie, čo v praxi predstavuje, že valcová častica je nekonečnej dĺžky. Na uzly vrchnej plochy bol rovnako ako v 2D úlohe použitý coupling, ktorý zabezpečoval ich spoločný posuv. Kvôli zakotveniu modelu v priestore bol v uzle, ktorý bol najvzdialenejší od čela trhliny, zamedzený posuv v ose  $x$ . Model materiálu zostal oproti 2D úlohe nezmenený a je uvedený v tabuľke číslo 5.

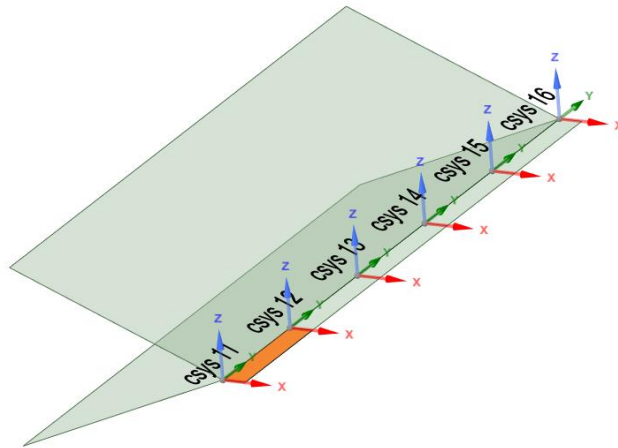
Kvôli názornosti sú okrajové podmienky vykreslené na nasledujúcom obrázku:



*Obrázok číslo 35 - OP pre 3D úlohu s valcovou časticou*

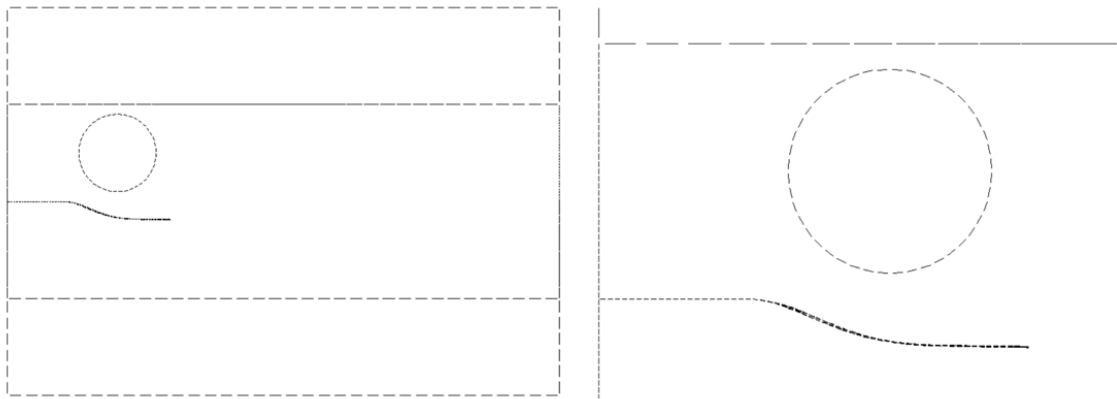
### **6.2.3. Riešenie úlohy s valcovou časticou v 3D**

Pri každom z 20 počítaných cyklov bol prírastok trhliny 0,1 mm. Výpočtový čas jedného cyklu dosiahol približne 4 minúty. Pri riešení bolo čelo trhliny rozdelené na 5 rovnako veľkých častí a v každej z nich bol zavedený lokálny súradnicový systém, v ktorom boli samostatne dopočítané hodnoty súčiniteľa intenzity napätia priamou metódou. Rovnako aj nové trhlinové plochy boli vytvárané na základe výsledkov z týchto bodov samostatne. Takýto prístup bol zvolený z dôvodu kontroly siete, ktorá sa v algoritme tvorí automaticky, a teda hodnoty jednotlivých súčiniteľov po šírke telesa by mali vychádzať približne rovnako (aj vďaka podmienke rovinnej deformácie). Rozdelenie čela trhliny je naznačené na obrázku číslo 36 a oranžovou farbou je vyznačená jedna z nových trhlinových plôch.



**Obrázok číslo 36 - Lokálne súradnicové systémy na čele trhliny**

Výsledný priebeh trhliny potom bol:



**Obrázok číslo 37 - Dva pohľady na priebeh trhliny**

Výsledné hodnoty súčiniteľov intenzity napätí pre každý druhý cyklus z 20 počítaných sú v uvedené v nasledujúcich tabuľkách:

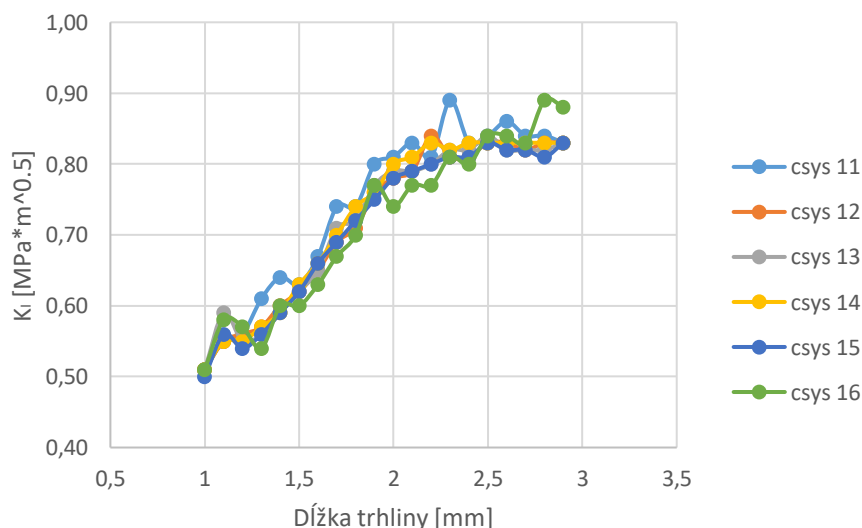
**Tabuľka číslo 9 - Výsledné hodnoty  $K_I$  pre 3D valcovú časticu**

Dĺžka trhliny [mm]	$K_I$ - csys11 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - csys12 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - csys13 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - csys14 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - csys15 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - csys16 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]
1	0,51	0,51	0,51	0,51	0,50	0,51
1,2	0,56	0,56	0,55	0,55	0,54	0,57
1,4	0,64	0,60	0,59	0,59	0,59	0,60
1,6	0,67	0,65	0,65	0,66	0,66	0,63
1,8	0,74	0,71	0,72	0,74	0,72	0,70
2	0,81	0,78	0,79	0,80	0,78	0,74
2,2	0,81	0,84	0,80	0,83	0,80	0,77
2,4	0,83	0,81	0,82	0,83	0,81	0,80
2,6	0,86	0,83	0,82	0,83	0,82	0,84
2,8	0,84	0,83	0,82	0,83	0,81	0,89

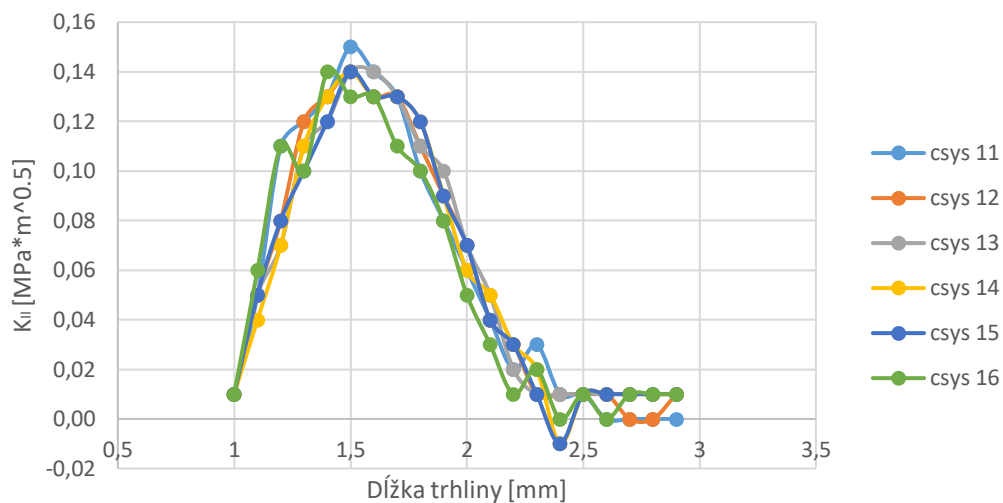
**Tabuľka číslo 10 - Výsledné hodnoty  $K_{II}$  pre 3D valcovú časticu**

Dĺžka trhliny [mm]	$K_{II}$ - csys11 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - csys12 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - csys13 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - csys14 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - csys15 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_{II}$ - csys16 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
1,2	0,11	0,08	0,07	0,07	0,08	0,11
1,4	0,13	0,13	0,12	0,13	0,12	0,14
1,6	0,14	0,13	0,14	0,13	0,13	0,13
1,8	0,10	0,11	0,11	0,12	0,12	0,10
2	0,06	0,07	0,07	0,06	0,07	0,05
2,2	0,02	0,03	0,02	0,03	0,03	0,01
2,4	0,01	0,01	0,01	-0,01	-0,01	0,00
2,6	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01	0,00
2,8	0,00	0,00	0,01	0,01	0,01	0,01

Pre lepšiu predstavu a porovnanie všetkých 20 výsledkov v jednotlivých vrstvách sa hodnoty  $K_I$  a  $K_{II}$  vykreslia do grafov:



**Obrázok číslo 38 - Priebeh  $K_I$  pri raste trhliny**



**Obrázok číslo 39 – Priebeh  $K_{II}$  pri raste trhliny**

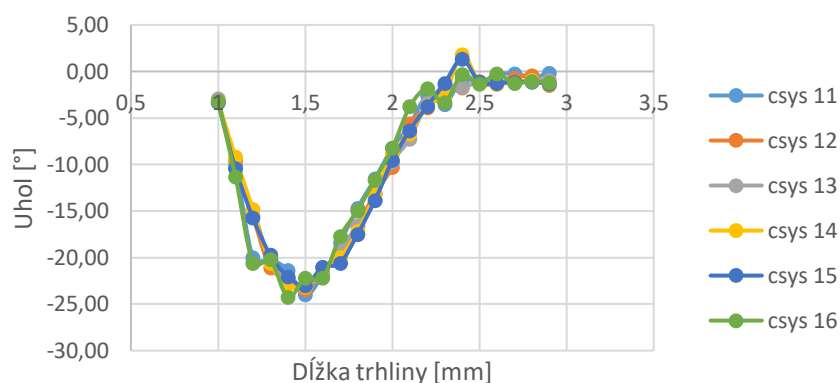
Z priebehu oboch súčiniteľov intenzity napätia vyplýva, že trend ich vývoja s rastúcou trhlinou sa zhoduje pre všetky vrstvy. Najväčšie numerické rozdiely hodnôt nastali v krajných bodoch (csys 11, csys 16), čo môže byť spôsobené okrajovými podmienkami, ktoré sú na čelných stenách nastavené (rovinná deformácia).

Rovnako dôležitý je aj pohľad na porovnanie výsledných uhlov v jednotlivých vrstvách:

**Tabuľka číslo 11 - Porovnanie uhlov po šírke**

Dĺžka trhliny [mm]	Uhol - csys 11 [°]	Uhol - csys 12 [°]	Uhol - csys 13 [°]	Uhol - csys 14 [°]	Uhol - csys 15 [°]	Uhol - csys 16 [°]
1,0	-3,24	-3,25	-2,95	-3,24	-3,34	-3,23
1,2	-20,01	-15,57	-14,82	-14,82	-15,71	-20,60
1,4	-21,35	-22,21	-22,17	-22,88	-22,04	-24,26
1,6	-21,90	-21,71	-21,74	-21,08	-21,02	-22,19
1,8	-14,69	-16,59	-16,54	-17,15	-17,50	-14,96
2,0	-8,21	-10,28	-9,72	-8,83	-9,56	-8,24
2,2	-2,58	-3,92	-3,38	-3,67	-3,75	-1,86
2,4	-0,87	-1,74	-1,66	1,82	1,31	-0,33
2,6	-0,36	-1,37	-1,19	-1,36	-1,25	-0,28
2,8	-0,65	-0,44	-0,94	-0,91	-1,14	-1,04

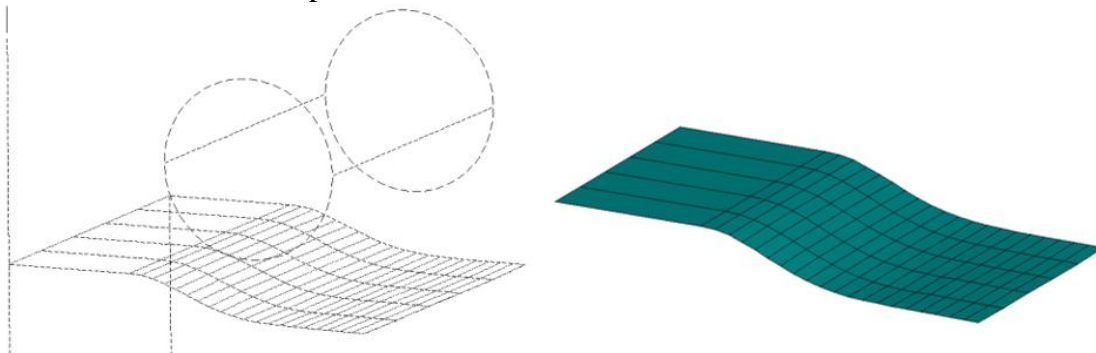
Pre lepšiu predstavu je opäť na mieste vykresliť graf:



**Obrázok číslo 40 - Priebeh uhlov pri rastúcej trhline**

Na výsledkoch pre uhol šírenia trhliny v jednotlivých vrstvách pri rastúcej trhline je opäť viditeľné, že najväčší rozdiel je v hodnotách krajných bodov (csys 11, csys 16).

Na rozdiely v hodnotách súčiniteľov intenzity napätia a uhlov pre jednotlivé trhlínové plochy má nemalý vplyv použitie priamej metódy, ktorá je veľmi citlivá a používa značné zjednodušenie. Avšak pri pohľade na priebeh skúmaných veličín pri raste trhliny, všetky prejavujú rovnaký trend, čo znamená, že mierne numerické odlišnosti výsledkov v jednotlivých bodoch na čele trhliny nemajú výrazný vplyv na jej celkové chovanie. Pri výpočte  $K_{II}$  sa vnáša do výsledkov chyba už len tým, že je vopred volená hodnota prírastku trhliny, preto sú odchýlky v týchto hodnotách väčšie ako v hodnotách  $K_I$ . Táto chyba priamo ovplyvňuje aj hodnoty uhlov, keďže tie závisia na hodnotách  $K_I$  a  $K_{II}$ . Práve pri pohľade na obrázok číslo 41, kde sú zobrazené trhlínové plochy výsledného modelu, je možné konštatovať, že rozdiely v číselných hodnotách  $K_I$  a  $K_{II}$  v jednotlivých bodoch majú na samotné trhlínové plochy len minimálny vplyv a šírenie trhlínových plôch samostatne bolo v podstate totožné.



**Obrázok číslo 41 - Trhlínové plochy pre 3D valcovú časticu**

### 6.3. Porovnanie 2D a 3D modelu valcovej častice

Keďže všetky okrajové podmienky a aj geometria 3D úlohy s valcovou časticou (kapitola 6.2) boli nastavené, tak že sa zhodujú s 2D úlohou vláknovej častice (kap. 6.1.4), bolo by vhodné výsledky týchto dvoch prístupov porovnať. V oboch prípadoch bolo spočítaných prvých 20 cyklov, pri počiatočnej dĺžke trhliny 1 mm a prírastku trhliny 0,1 mm na cyklus.

Pre prehľadnejšie porovnanie boli z 3D modelu zvolené hodnoty len z jedného súradnicového systému, konkrétne csys 12. Rovnako do porovnania budú v 2D prípade vstupovať výsledky dosiahnuté priamou metódou, keďže práve táto metóda bola použitá aj v prípade 3D modelu.

#### 6.3.1. Porovnanie hodnôt súčiniteľa intenzity napätia pre mód I

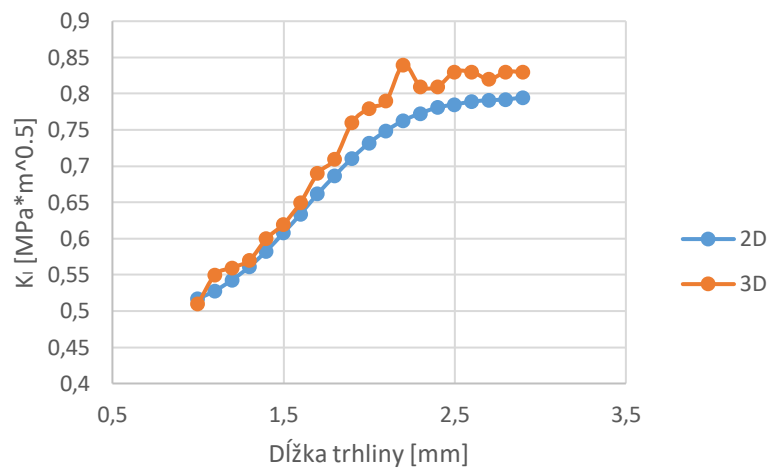
Ako prvé je porovnanie výsledných hodnôt  $K_I$ . Ako vzťažná hodnota sa berú výsledky 2D a na základe nich je dopočítaná odchýlka výsledných hodnôt 3D:

*Tabuľka číslo 12 - Porovnanie 2D a 3D hodnôt  $K_I$*

$K_I$ - 2D [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	$K_I$ - 3D [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	Odchýlka [%]
0,52	0,51	1,4
0,53	0,55	-4,2
0,54	0,56	-3,7
0,56	0,57	-1,8
0,58	0,60	-2,9
0,61	0,62	-2,0
0,63	0,65	-2,5
0,66	0,69	-4,2
0,69	0,71	-3,3
0,71	0,76	-6,9
0,73	0,78	-6,6
0,75	0,79	-5,5
0,76	0,84	-10,1
0,77	0,81	-4,8
0,78	0,81	-3,7
0,79	0,83	-5,7
0,79	0,83	-5,2
0,79	0,82	-3,7
0,79	0,83	-4,8
0,80	0,83	-4,4



V grafe vyzerá toto porovnanie nasledovne:



**Obrázok číslo 42 - Priebeh  $K_I$  pre 2D a 3D prípady**

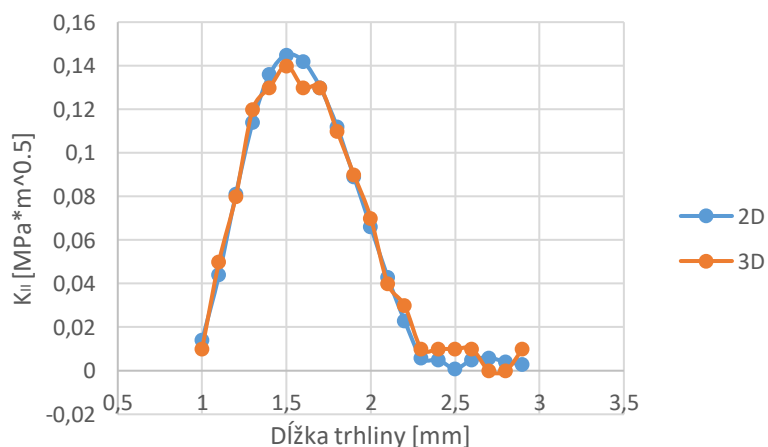
Z grafu aj tabuľkových hodnôt je vidieť, že trend je v oboch prípadoch rovnaký, pričom hodnoty súčiniteľa intenzity napätia v 3D sú o niečo vyššie ako v 2D, konkrétne maximálne o 10%. Tento rozdiel môže byť spôsobený nedokonalosťou siete konečných prvkov v kombinácii s použitím priamej metódy.

### 6.3.2. Porovnanie hodnôt súčiniteľa intenzity napätia pre mód II

Ako je už viackrát v práci spomenuté, už pri samotnom modelovaní sa do hodnôt súčiniteľa intenzity napätia módu II vnáša chyba, a to v dôsledku vopred zvoleného prírastku trhliny. Porovnanie ich výsledkov je v nasledujúcej tabuľke:

*Tabuľka číslo 13 - Porovnanie 2D a 3D hodnôt  $K_{II}$*

$K_{II}$ - 2D	$K_{II}$ - 3D
[MPa · m <sup>1/2</sup> ]	[MPa · m <sup>1/2</sup> ]
0,01	0,01
0,04	0,05
0,08	0,08
0,11	0,12
0,14	0,13
0,15	0,14
0,14	0,13
0,13	0,13
0,11	0,11
0,09	0,09
0,07	0,07
0,04	0,04
0,02	0,03
0,01	0,01
0,01	0,01
0,00	0,01
0,01	0,01
0,01	0,00
0,00	0,00
0,00	0,01



*Obrázok číslo 43 - Priebeh  $K_{II}$  pre 2D a 3D prípady*

Počas celého výpočtu dosahuje  $K_{II}$  veľmi malé hodnoty, pri ktorých sa aj minimálny rozdiel prejaví. Sledovaný trend je však pre 2D aj 3D prípad totožný. Je teda opäť nutné

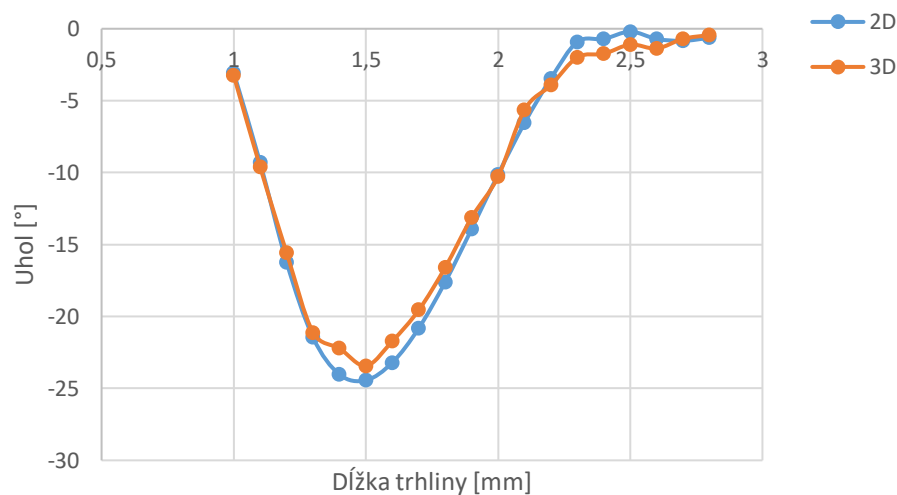
konštatovať, že hlavný podiel na týchto rozdieloch má priama metóda a jej zjednodušenie pri výpočte v kombinácii s numerickou chybou.

### 6.3.3. Porovnanie hodnôt uhlu šírenia trhliny

Nakoľko sa na výpočet uhlu šírenia trhliny využívajú hodnoty súčiniteľa intenzity napätia módu I aj II (rovnica číslo 3.29), je možné predpokladať, že odchýlky výsledných uhlov pre 2D a 3D budú priamo súvisieť s predchádzajúcimi porovnaniami.

*Tabuľka číslo 14 – Porovnanie 2D a 3D hodnôt uhlov šírenia trhliny*

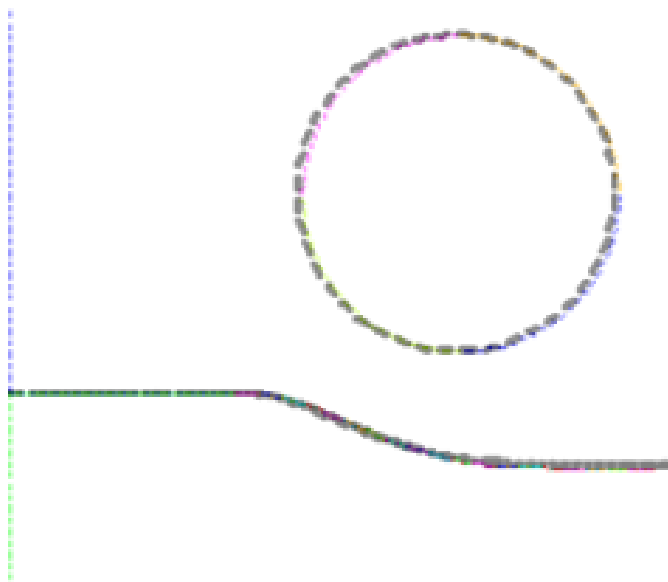
Uhol - 2D	Uhol - 3D	Odchýlka
[°]	[°]	[%]
-3,1	-3,3	-6,5
-9,3	-10,5	-12,9
-16,2	-15,7	3,1
-21,5	-20,5	4,7
-24,0	-22,3	7,1
-24,4	-23,2	4,9
-23,2	-23,1	0,4
-20,8	-20,0	3,8
-17,6	-15,6	11,4
-13,9	-13,1	5,8
-10,1	-10,5	-4,0
-6,6	-6,0	9,1
-3,5	-3,9	-11,4
-0,9	-1,2	-33,3
1,0	1,5	-50,0
2,4	2,4	0,0
3,2	2,9	9,4
3,7	4,6	-24,3
3,8	4,4	-15,8
3,7	3,4	8,1



**Obrázok číslo 44 - Uhol šírenia trhliny 2D a 3D**

Podľa predpokladu je trend uhlu šírenia trhliny pri jej raste rovnaký pre oba prípady 2D a 3D (obr. č. 44).

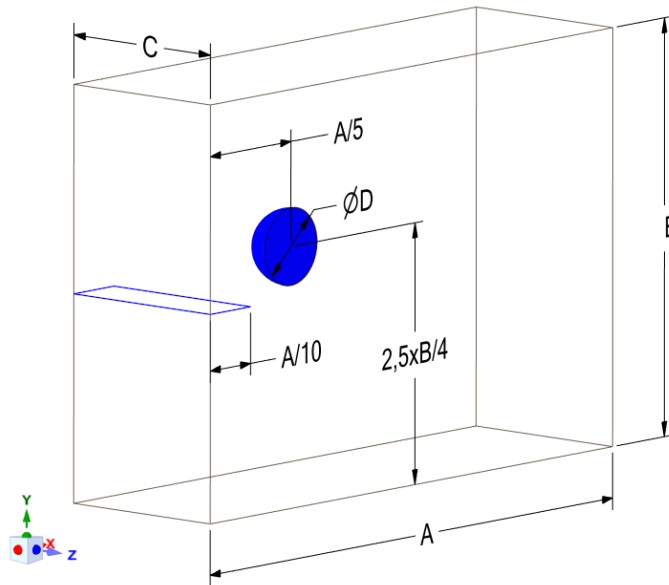
Na obrázku číslo 45 je porovnanie tvaru a vzhľadu trhliny po 20 cykloch zaťažovania v 2D a 3D. Práve pri pohľade na tvar oboch trhlín je možné konštatovať, že vplyv číselných odchýlok v 2D a 3D prípade je len minimálny a výsledné tvary trhliny sú totožné. Veľký rozdiel nastal pri porovnaní výpočtových časov: pri úlohe 2D trval 1 cyklus približne 30 sekúnd, pričom pri 3D úlohe to bol viac ako 8 násobne dlhší čas.



**Obrázok číslo 45 - Tvar trhliny (farebne - 2D, čierne - 3D)**

## 6.4. Úloha 3D guľová častica

Model geometrie použitý pri 3D úlohe s guľovou časticou je zobrazený na nasledujúcom obrázku:



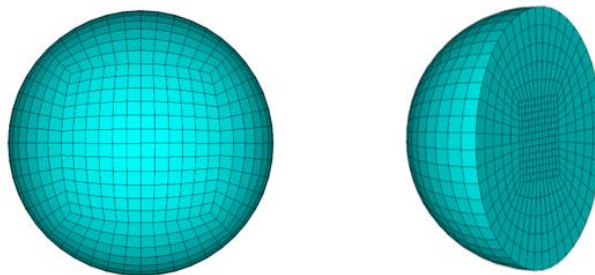
Obrázok číslo 46 - Model geometrie pre 3D guľovú časticu

( $A=10\text{mm}$ ,  $B=7\text{mm}$ ,  $\phi D=1,4\text{mm}$ ,  $C=3\text{mm}$ )

Počiatočná dĺžka trhliny bola zvolená rovnako ako pri všetkých predchádzajúcich úlohách 1 mm a jej prírastok 0,1 mm. Modelovaná bola polovica guľovej častice, čo je možné vidieť na obrázku číslo 46.

### 6.4.1. Tvorba siete konečných prvkov

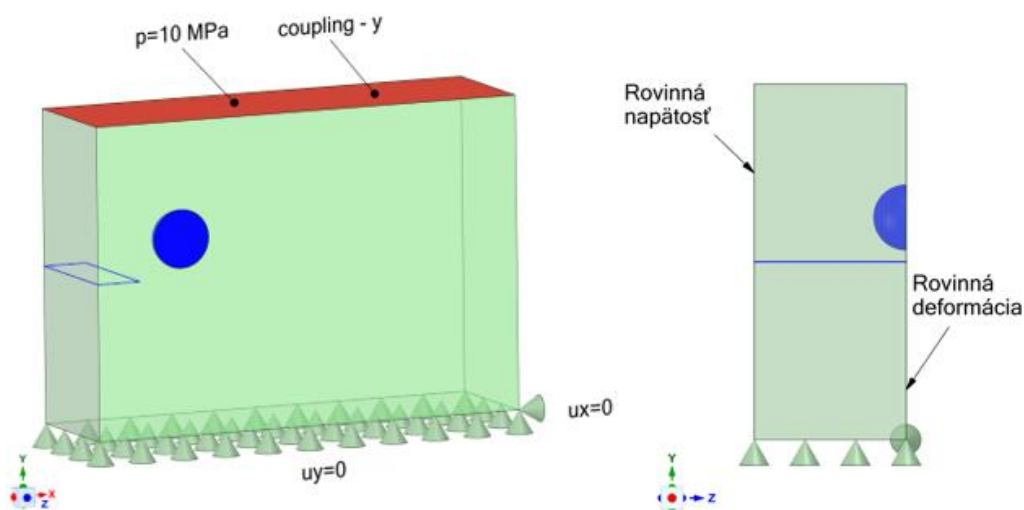
Sieť konečných prvkov bola opäť vytvorená z elementov typu SOLID 185. Pri jej tvorbe bolo na čele trhliny použité zjemnenie, keďže práve to je podstatné pre presnosť riešenia. Počet prvkov pri jednotlivých výpočtoch dosahoval približne 2 milióny.



Obrázok číslo 47 - Mapovaná sieť guľovej častice

#### 6.4.2. Okrajové podmienky

Okrajové podmienky boli aplikované, aby opäť simulovali skúšku jednoosím ťahom. Na vrchnú plochu bolo aplikované ťahové napätie (10 MPa), na spodnej ploche bola zavedená symetria v ose  $y$ . Na uzly vrchnej plochy bol rovnako ako v 2D úlohe použitý coupling, ktorý zabezpečoval ich spoločný posuv. Na čelnej strane, kde je modelovaná polovica guľovej častice je definovaná rovinná deformácia a na opačnej strane telesa naopak rovinná napätosť. Kvôli zakotveniu modelu v priestore bol v uzle, ktorý bol najvzdialenejší od čela trhliny, zamedzený posuv v ose  $x$ . Model materiálu ostáva nezmenený a je podrobne popísaný v tabuľke číslo 5. Okrajové podmienky sú jasne viditeľné na nasledujúcom obrázku:

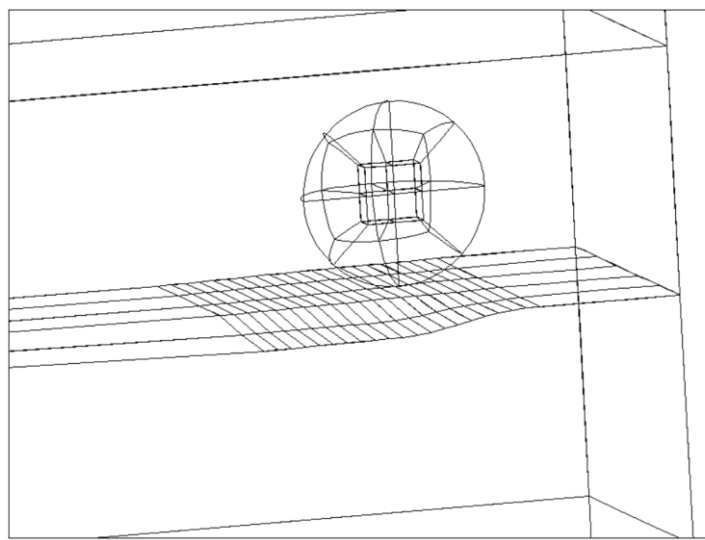


Obrázok číslo 48 - OP pre 3D úlohu s guľovou časticou

#### 6.4.3. Riešenie úlohy 3D s guľovou časticou

Pri výpočte bolo počítaných opäť 20 cyklov, každý s prírastkom trhliny 0,1 mm. Výpočtový čas jedného cyklu dosiahol približne 4 minúty. Čelo trhliny bolo rozdelené 6 súradnicovými systémami na 5 rovnakých častí (viď. obr. č. 36). Súradnicový systém číslo 11 sa nachádzal na okraji s časticou pri podmienke rovinatej deformácie a naopak posledný súradnicový systém číslo 16 sa posúval s trhlinou po stene pri podmienke rovinatej napätosti.

Výsledný tvar trhliny po celom priereze vyzeral nasledovne:



**Obrázok číslo 49 - Priebeh trhliny v prípade 3D s guľovou časticou**

Výsledné hodnoty  $K_I$  a  $K_{II}$  pre každý druhý cyklus z 20 počítaných sú v uvedené v nasledujúcich tabuľkách:

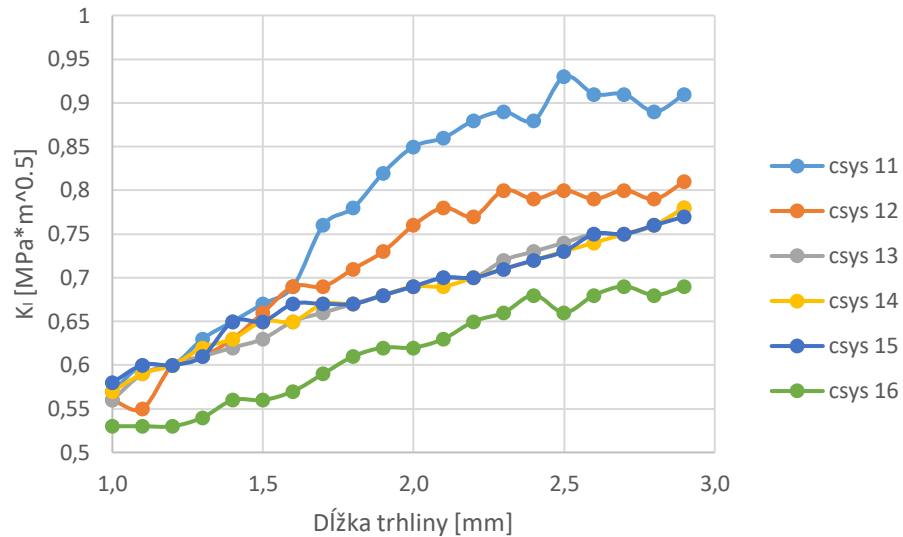
**Tabuľka číslo 15 - Výsledné hodnoty  $K_I$  pre 3D prípad s guľovou časticou**

Dĺžka trhliny [mm]	KI - csys 11 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KI - csys 12 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KI - csys 13 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KI - csys 14 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KI - csys 15 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KI - csys 16 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]
1,0	0,57	0,56	0,56	0,57	0,58	0,53
1,2	0,60	0,60	0,60	0,60	0,60	0,53
1,4	0,65	0,63	0,62	0,63	0,65	0,56
1,6	0,69	0,69	0,65	0,65	0,67	0,57
1,8	0,78	0,71	0,67	0,67	0,67	0,61
2,0	0,85	0,76	0,69	0,69	0,69	0,62
2,2	0,88	0,77	0,70	0,70	0,70	0,65
2,4	0,88	0,79	0,73	0,72	0,72	0,68
2,6	0,91	0,79	0,75	0,74	0,75	0,68
2,8	0,89	0,79	0,76	0,76	0,76	0,68

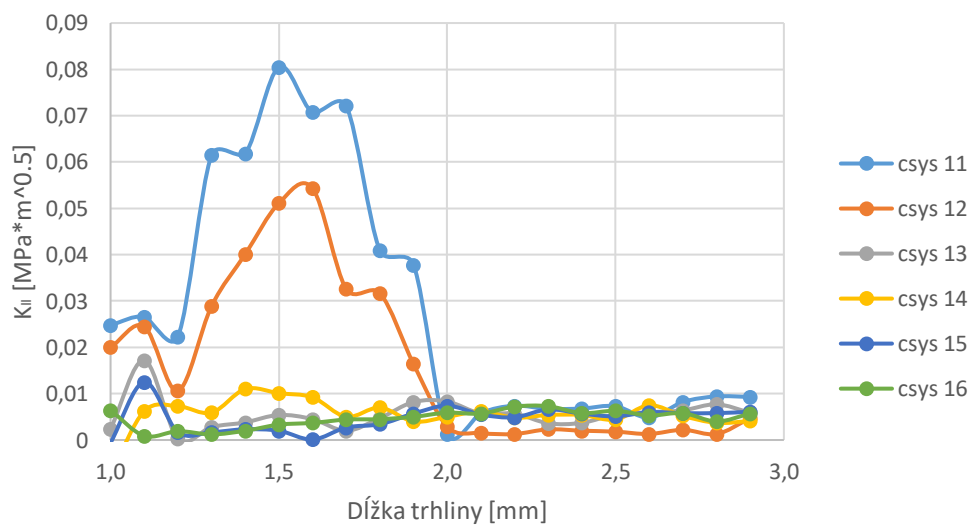
**Tabuľka číslo 16 - Výsledné hodnoty  $K_{II}$  pre 3D prípad s guľovou časticou**

Dĺžka trhliny [mm]	KII - csys 11 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KII - csys 12 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KII - csys 13 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KII - csys 14 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KII - csys 15 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	KII - csys 16 [MPa · m <sup>1/2</sup> ]
1,0	0,025	0,020	0,002	-0,007	-0,001	0,006
1,2	0,022	0,011	0,000	0,007	0,002	0,002
1,4	0,062	0,040	0,004	0,011	0,002	0,002
1,6	0,071	0,054	0,005	0,009	0,000	0,004
1,8	0,041	0,032	0,005	0,007	0,003	0,005
2,0	0,001	0,003	0,008	0,005	0,007	0,006
2,2	0,007	0,001	0,006	0,005	0,005	0,007
2,4	0,007	0,002	0,004	0,005	0,006	0,006
2,6	0,005	0,001	0,006	0,008	0,006	0,005
2,8	0,009	0,001	0,008	0,004	0,006	0,004

Pre lepšiu predstavu porovnania výsledkov  $K_I$  a  $K_{II}$  v jednotlivých súradnicových systémoch cez celú šírku telesa je vhodné vykresliť výsledné hodnoty všetkých 20 cyklov do grafov:



**Obrázok číslo 50 - Priebeh  $K_I$  vo všetkých súradnicových systémoch**



**Obrázok číslo 51 - Priebeh  $K_{II}$  vo všetkých súradnicových systémoch**

Z výsledných hodnôt  $K_I$  je jasne viditeľný vplyv častice, ale aj podmienky rovinnej napätosti na jednej stene telesa. Najvyššie hodnoty sú v súradnicových systémoch, ktoré sú najbližšie pri častici, a to csys 11 a 12.



Výsledky pre súradnicové systémy 13,14 a 15, ktoré už nie sú ovplyvnené časticou sú v podstate totožné. Naopak najmenšie hodnoty  $K_I$  sú v súradnicovom systéme číslo 16, a to z dôvodu podmienky rovinnej napätosti.

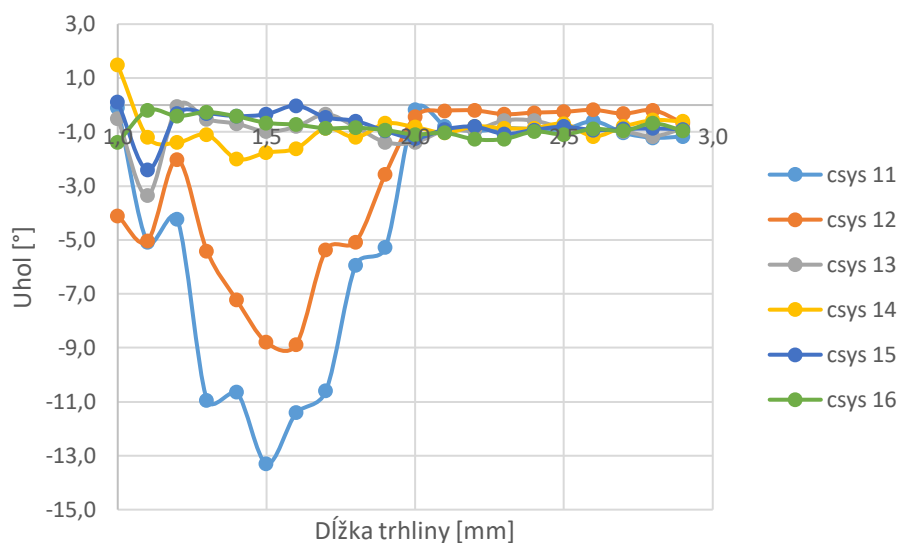
Z výsledných hodnôt  $K_{II}$  je takisto jasne viditeľný vplyv častice. Vyššie hodnoty dosahuje  $K_{II}$  len v súradnicových systémoch 11 a 12, ktoré sú časticou priamo ovplyvnené. Takisto je viditeľný jasný pokles týchto hodnôt v momente, keď už trhlinka klesne a vzdiali sa od častice.

Zaujímavý je aj pohľad na výsledné hodnoty uhlov v jednotlivých súradnicových systémoch. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené výsledné uhly pre každý druhý cyklus z celkových 20 počítaných:

*Tabuľka číslo 17 - Výsledné hodnoty uhlov šírenia trhliny*

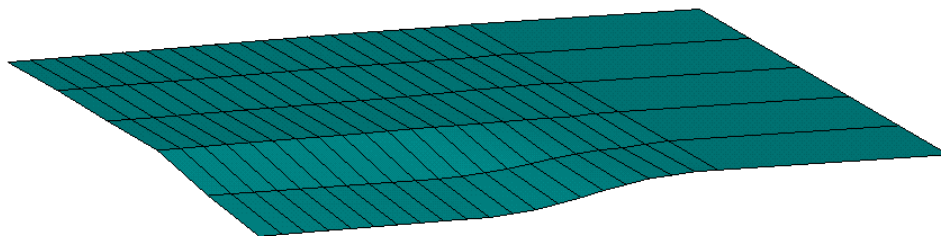
Dĺžka trhliny [mm]	Uhol - csys 11 [°]	Uhol - csys 12 [°]	Uhol - csys 13 [°]	Uhol - csys 14 [°]	Uhol - csys 15 [°]	Uhol - csys 16 [°]
1,0	-0,1	-4,1	-0,5	1,5	0,1	-1,4
1,2	-4,2	-2,0	-0,1	-1,4	-0,3	-0,4
1,4	-10,6	-7,2	-0,7	-2,0	-0,4	-0,4
1,6	-11,4	-8,9	-0,8	-1,6	0,0	-0,7
1,8	-5,9	-5,1	-0,8	-1,2	-0,6	-0,8
2,0	-0,2	-0,4	-1,4	-0,8	-1,2	-1,1
2,2	-1,0	-0,2	-0,9	-0,8	-0,8	-1,3
2,4	-0,9	-0,3	-0,6	-0,9	-0,9	-1,0
2,6	-0,6	-0,2	-0,9	-1,2	-0,9	-0,9
2,8	-1,2	-0,2	-1,2	-0,6	-0,9	-0,7

Priebeh uhlu šírenia trhliny v 20 počítaných cykloch v závislosti na dĺžke trhliny je na nasledujúcom obrázku:



**Obrázok číslo 52 - Priebeh uhlov vo všetkých súradnicových systémoch**

Z pohľadu na tento priebeh uhlov je jasné, že trhlina sa v miestach, kde nie je ovplyvnená časticou, správa ako keby sa šírila homogénnym materiálom (csys 13,14,15,16). Naopak prítomnosť častice evidentne ovplyvňuje tvar trhliny v súradnicových systémoch 11 a 12. Rovnako je podstatný aj tvar častice a nakoľko je v tomto prípade častica guľového tvaru, ovplyvňuje podstatne menšie okolie. Preto hodnoty uhlov v súradnicovom systéme 12 sú nezanedbateľne nižšie ako hodnoty uhlov v súradnicovom systéme 11, v ktorom je trhlina najbližšie pri častici. Toto je najlepšie viditeľné pri pohľade na samotné trhlinové plochy:



**Obrázok číslo 53 - Trhlinové plochy v 3D prípade s guľovou časticou**

## 6.5. Subkritický rast trhliny

V kapitole 3.7 bol podrobnejšie popísaný spôsob výpočtu rýchlosti rastu trhliny. V tejto kapitole bude vykonaný výpočet času rastu trhliny až do hodnoty lomovej húževnatosti. Jej hodnota už bola uvedená v kapitole 3.7 a pre kompozitné materiály má hodnotu približne  $0,79 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ . Spočítané budú časy pre tri prípady šírenia trhliny, ktoré sú súčasťou predchádzajúcich kapitol, a to konkrétne trhlina šíriaca sa v 2D (výpočet priamou metódou), trhlina šíriaca sa v 3D kompozitnom telese s valcovou časticou a v 3D kompozitnom telese s guľovou časticou.

Na výpočet času rastu trhliny až do hodnoty lomovej húževnatosti bude využitá rovnica číslo 3.32 pre výpočet rýchlosti na čele trhliny a to nasledujúcim spôsobom:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{s}{A \left( \frac{K_I}{K_{IC}} \right)^n}, \quad (6.5)$$

kde  $t$  je čas rastu trhliny,  $s$  je dráha, ktorú trhlina prešla počas prírastku,  $v$  je rýchlosť šírenia trhliny (rovnica číslo 3.32).

Konštanty vstupujúce do výpočtu:

*Tabuľka číslo 18 - Konštanty vstupujúce do výpočtu [24,6]*

<b>K<sub>IC</sub> [MPa · m<sup>1/2</sup>]</b>	0,79
<b>K<sub>th</sub> [MPa · m<sup>1/2</sup>]</b>	0,24-0,27
<b>A [m · s<sup>-1</sup>]</b>	0,070387
<b>n [-]</b>	35,1
<b>s [m]</b>	1,00E-04

Pri výpočte celkového času rastu trhliny do hodnoty lomovej húževnatosti sa vo všetkých prípadoch spočíta čas každého prírastku trhliny (0,1 mm) zvlášť a tieto časy sa na záver sčítajú. Pre výpočet 3D valcovej častice sú brané výsledky z rovnakého súradnicového systému (csys 12), ktorý bol použitý na porovnanie výsledkov s 2D (kap. č. 6.3). Pre výpočet 3D guľovej častice sú zas použité hodnoty z krajného súradnicového systému ovplyvneného časticou (csys 11).

Tabuľka číslo 19 - Výsledné hodnoty času šírenia trhliny

K <sub>I</sub> - 2D [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	t [s]	K <sub>I</sub> - 3D valec [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	t [s]	K <sub>I</sub> - 3D častica [MPa · m <sup>1/2</sup> ]	t [s]
0,52	3368,991	0,51	6660,457	0,57	134,2795
0,53	1726,371	0,55	470,4211	0,60	22,1875
0,54	895,7694	0,56	249,9295	0,62	7,018898
0,56	249,9295	0,57	134,2795	0,61	12,42053
0,58	72,92806	0,60	22,1875	0,65	1,336467
0,61	12,42053	0,62	7,018898	0,69	0,164291
0,63	4,0028	0,65	1,336467	0,72	0,036885
0,66	0,782033	0,69	0,164291	0,74	0,014099
0,69	0,164291	0,71	0,060263	0,75	0,008802
0,71	0,060263	0,76	0,005529	0,75	0,008802
0,73	0,022729	0,78	0,002222		
0,75	0,008802	0,79	0,001421		
0,76	0,005529				
0,77	0,003495				
0,78	0,002222				
0,79	0,001421				
0,79	0,001421				
<b>súčet</b>	6331,465	<b>súčet</b>	7545,864	<b>súčet</b>	177,4758

V tabuľke číslo 19 sú uvedené výsledné hodnoty času šírenia trhlín pre jednotlivé prípady do dosiahnutia hodnoty lomovej húževnatosti.

Pre 2D úlohu uplynie približne 1,76 hodiny, pre 3D úlohu s valcovou časticou niečo málo cez 2 hodiny a pri 3D úlohe s guľovou časticou menej ako 3 minúty do dosiahnutia hodnoty lomovej húževnatosti. Výpočet najviac závisí na hodnote súčiniteľa intenzity napätia v prvom cykle, takže keď v prípade guľovej častice už začína na pomerne vysokej hodnote  $0,57 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{\frac{1}{2}}$ , dosiahne podstatne kratší čas. V prípade valcovej častice v 2D a 3D sú hodnoty  $K_I$  v prvom a druhom cykle takmer rovnaké, preto je aj ich výsledný čas rádovo rovnaký. Rozdiel môže byť spôsobený aj tým, že v prípade guľovej častice sa  $K_I$  mení po celom vrchole trhliny a postupne prechádza z podmienky rovinnej deformácie do podmienky rovinnej napätosti.

## Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo vytvoriť 2D a 3D konečno-prvkové modely pre analýzu šírenia trhliny v kompozitnom materiáli pri subkritickom raste. V práci je vytvorených niekoľko modelov geometrie (2D geometria, 3D s valcovou a guľovou časticou), v ktorých je vytvorený algoritmus šírenia trhliny. Výsledky jednotlivých modelov sú neskôr porovnané.

V prvej časti práce bola zhrnutá základná teória lomovej mechaniky, ktorá je v práci využívaná. Teoretická časť bola doplnená o kapitolu, ktorá sa zaoberá kompozitnými materiálmi, konkrétne nízkoteplotne vypaľovanou keramikou (LTCC).

Nasledujúca časť bola vymedzená pre rešerš existujúcich vedeckých článkov zaoberajúcich sa šírením trhlín v kompozitných materiáloch. Táto časť dodáva akýsi prehľad používaných spôsobov riešenia tejto problematiky.

V praktickej časti diplomovej práce sa na začiatku použil 2D model geometrie a bol počítaný prípad, kedy bol model materiálu tvorený len jedným typom materiálu. Táto úloha poslúžila ako kontrola vytvoreného algoritmu šírenia trhliny a metód vyhodnocovania súčiniteľa intenzity napätia. Na vyhodnocovanie  $K_I$  a  $K_{II}$  boli využité dve metódy, a to priama metóda a metóda využívajúca trhlinové prvky. Výsledné hodnoty boli porovnané s analytickým riešením, pričom maximálna odchýlka (pre trhlinové prvky) dosiahla 3,6%. Na základe tohto overenia správnosti riešenia sa pristúpilo k samotnému numerickému modelovaniu na kompozitnom telese tvorenom 2 zložkami, pričom simulovaných bolo 20 cyklov zaťažovania. Porovnané boli výsledné hodnoty  $K_I$ ,  $K_{II}$  pre obe spočítané metódy a v oboch prípadoch bola dosiahnutá uspokojivá zhoda. Obidve veličiny dosahovali rovnaký trend pri šírení trhliny.

V nasledujúcej časti bol vypracovaný 3D model geometrie s valcovou časticou, kde na vyhodnocovanie súčiniteľov intenzity napätia bola využívaná priama metóda. Tento model slúžil na porovnanie výsledkov pre prípady 3D a 2D. Aj keď jednotlivé číselné hodnoty  $K_I$ ,  $K_{II}$  vykazovali odchýlky, výsledné tvary trhlín v 2D a 3D boli takmer totožné.

Posledným modelom geometrie bol 3D model s guľovou časticou. Pri šírení trhliny týmto modelom geometrie došlo k predpokladanému správaniu trhliny. Trhlina sa v miestach dostatočne vzdialených od častice šírila pod takmer nulovým uhlom, pričom v miestach v tesnej blízkosti častice ňou bola významne ovplyvnená.

V poslednej časti práce bol vypočítaný čas potrebný na šírenie trhliny až do dosiahnutia hodnoty lomovej húževnatosti. Porovnané boli výsledné časy pre 3 spočítané prípady. Pre 2D úlohu bol výsledný čas približne 1,76 hodiny, pre 3D úlohu s valcovou časticou približne 2 hodiny a pre 3D úlohu s guľovou časticou len 177,4 sekundy.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] ANDERSON, T.L. *Solutions Manual for Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*. 2 ed. Boca Raton: CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-9482-1.
- [2] ANLAS, G., LAMBROS J., SANTARE M. H. *Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials*. International Journal of Fracture [online]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, 115(2), 193-204 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1023/A:1016372120480. ISSN 0376-9429.
- [3] ANSYS® *User's Manual*, 2010. Release 13.0. SAS IP, Inc.
- [4] BAREŠ, R., NĚMEC, J. *Kompozitní materiály*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1988, 325 s.
- [5] BELAVIC, D., M. HROVAT, G. DOLANC, M. SANTO ZARNIK, J. HOLC a K. MAKAROVIC. *Design of LTCC-based Ceramic Structure for Chemical Microreactor. Radioengineering* [online]. Společnost pro radioelektronické inženýrství, 21(1), 195-200 [cit. 2020-05-19]. ISSN 1210-2512.
- [6] BERMEJO, R., SUPANCIC, P., KRAUTGASSER, C., MORRELL, R., DANZER, R., BERMEJO, R. *Subcritical Crack Growth in Low Temperature Co-Fired Ceramics Under Biaxial Loading. Engineering Fracture Mechanics* [online]. 2013, 100, 108-121 [cit. 2020-06-21]. ISSN 0013-7944. Dostupné z: <http://search.proquest.com/docview/1372611025/>
- [7] BUJALOBOKOVÁ, M., TRNKA, P. *Progresivní tlustovrstvé technologie v elektronických aplikacích*. Elektro. 2008, 2008(1), 6-8.
- [8] CAO, P., LI, J., YUAN, H. *Testing study of subcritical crack growth rate and fracture toughness in different rocks. Transactions of Nonferrous Metals Society of China* [online]. Elsevier, 2006, 16(3), 709-713 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/S1003-6326(06)60126-X. ISSN 1003-6326.
- [9] CIRELLO, A., ZUCCARELLO, B. *On the effects of a crack propagating toward the interface of a bimaterial system. Engineering Fracture Mechanics* [online]. Elsevier, 2006, 73(9), 1264-1277 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2005.12.003. ISSN 0013-7944.
- [10] ERDOGAN, F., SIH, G.C. *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering 85D, 519525, 1963.

- [11] GDOUTOS, E.E. *Problems of mixed mode crack propagation*. The Netherlands, Martinus Nijhoff, 1984.
- [12] HEGEN, D., BAAIJENS F. P. T., DE BORST, R., SCHREURS, P. *An element-free Galerkin method for crack propagation in brittle materials [online]*. 1997 [cit. 2020-06-16]. ISBN 90-386-0-339-8.
- [13] CHARLES, R. J. *Static Fatigue of Glass. I. Journal of Applied Physics [online]*. American Institute of Physics, 1958, 29(11), 1549-1553 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1063/1.1722991. ISSN 0021-8979.
- [14] CHO, J.R. *Stress intensity factors and crack propagation of metal-ceramic random microstructures. Materials Today Communications [online]*. 2020, 24 [cit. 2020-06-24]. DOI: 10.1016/j.mtcomm.2020.101071. ISSN 23524928. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2352492819311717>
- [15] JANÍČEK, P., MAREK, J. *Expertní inženýrství v systémovém pojetí*. Praha: Grada, 2013. Expert (Grada). ISBN 978-80-247-4127
- [16] KIM, J., PAULINO, GLAUCIO, H. *Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering [online]. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2002, 53(8), 1903-1935 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1002/nme.364. ISSN 0029-5981.
- [17] KO, T. Y., KEMENY, J. *Determination of the subcritical crack growth parameters in rocks using the constant stress-rate test*. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences [online]. Elsevier, 2013, 59, 166-178 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2012.11.006. ISSN 1365-1609.
- [18] KOSEK, L. *Lomová houževnatost kovových materiálů a její zkoušení*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2010, 41 stran : 1 CD-ROM.
- [19] MA, M., LIU, Z., LI, Y. *Multilayer Metallized Ceramic Composites: LTCC Processing and Thermal Simulation. Ferroelectrics [online]*. Taylor & Francis Group, 2013, 450(1), 107-112 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1080/00150193.2013.838507. ISSN 0015-0193. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00150193.2013.838507>
- [20] PARIS, P.C., ERDOGAN, F. *Critical analysis of crack propagation laws*. Journal of Basic Engineering 85, 9-14, 1960



- [21] PATRÍCIO, M., MATTHEIJ R.M.M, De WITH. *Effects of the local structure on a cracked periodically distributed composite [online]*. 2008 [cit. 2020-06-16]. ISSN 0926-4507.
- [22] PATRÍCIO, M., MATTHEIJ, R. M. M. *Crack paths in composite materials. Engineering Fracture Mechanics [online]*. Elsevier, 2010, 77(12), 2251-2262 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2010.05.005. ISSN 0013-7944.
- [23] POOK, L.P. *On fatigue crack paths*. International Journal of Fatigue [online]. Elsevier, 1995, 17(1), 5-13 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/0142-1123(95)93045-4. ISSN 0142-1123.
- [24] REKTORYS, K. *Přehled užití matematiky. 5., nezm. vyd.* Praha 1988: SNTL, 607 s. : il., grafy ; 25 cm.
- [25] SGLAVO, VINCENZO M., GREEN, D. J. *Indentation Determination of Fatigue Limits in Silicate Glasses*. Journal of the American Ceramic Society [online]. Westerville, Ohio: American Ceramics Society, 1999, 82(5), 1269-1274 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1999.tb01906.x. ISSN 0002-7820.
- [26] ŠEVČÍK, M. *Vliv volného povrchu tělesa a gradientní změny materiálových vlastností na chování trhliny*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 103 s. Vedoucí disertační práce doc. Ing. Luboš Náhlík, Ph.D.
- [27] TILBROOK, M. T., MOON, R. J., HOFFMAN, M. *Crack propagation in graded composites. Composites Science and Technology [online]*. Elsevier, 2005, 65(2), 201-220 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1016/j.compscitech.2004.07.004. ISSN 0266-3538.
- [28] VLK, M. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno: VUT Brno, 1991, 185 s. : il. ISBN 80-214-0386-1.
- [29] VRBKA, J. *Mechanika kompozitů*. Brno, 2008.
- [30] WHITCOMB, J.D., RAJU, I.S., GOREE, J.G. *Reliability of the finite element method for calculating free edge stresses in composite laminates*. Composite & Structures 15 (1), 23-37, 1982.

- [31] WILLIAMS, J., EWING, P. *Fracture under complex stress — The angled crack problem*. International Journal of Fracture [online]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984, 26(4), 346-351 [cit. 2020-06-16]. DOI: 10.1007/BF00962967. ISSN 0376-9429.
- [32] WILLIAMS, M.L. *On the stress distribution at the base of a stationary crack*. Journal of Applied Mechanics 24, 1957, 109-114.

## Zoznam obrázkov

Obrázok číslo 1 - Plastická zóna .....	15
Obrázok číslo 2 - R – krivky .....	17
Obrázok číslo 3 - Krivkový J - integrál .....	18
Obrázok číslo 4 - Priebeh napätia na čele trhliny .....	19
Obrázok číslo 5 - Zaťažovacie módy .....	20
Obrázok číslo 6 - Uvoľnený jednotkový prvok na čele trhliny .....	20
Obrázok číslo 7 - Trhlinové prvky .....	22
Obrázok číslo 8 - Priebeh faktoru intenzity napätia .....	24
Obrázok číslo 9 - Vplyv parametrov na lomovú húževnatosť .....	25
Obrázok číslo 10 - Etapy rastu trhliny .....	28
Obrázok číslo 11 - Rozdelenie kompozitných materiálov .....	30
Obrázok číslo 12 - Spôsob výroby LTCC keramiky .....	31
Obrázok číslo 13 - Trhlina dosiahla rozhranie 2 materiálov .....	32
Obrázok číslo 14 - Okrajové podmienky .....	33
Obrázok číslo 15 - Výsledný priebeh šírenia trhliny .....	34
Obrázok číslo 16 - Model geometrie .....	34
Obrázok číslo 17 - Výsledný tvar trhliny .....	35
Obrázok číslo 18 - Vygenerované mikroštruktúry pre 3 rôzne $V_1$ .....	36
Obrázok číslo 19 - Vygenerované mikroštruktúry pre rôzne N .....	36
Obrázok číslo 20 - Okrajové podmienky (vľavo) a model materiálu (vpravo) .....	36
Obrázok číslo 21 - Priebeh súčiniteľov intenzity napätí .....	37
Obrázok číslo 22 - Model geometrie (vľavo) a model materiálu (vpravo) .....	37
Obrázok číslo 23 - Konfigurácie modelu geometrie .....	38
Obrázok číslo 24 - Model geometrie pre 2D úlohu .....	41

Obrázok číslo 25 - Detail siete konečných prvkov .....	42
Obrázok číslo 26 - OP pre 2D úlohu .....	42
Obrázok číslo 27 - Trhlinové prvky .....	44
Obrázok číslo 28 - Priebeh $K_I$ po celou hrúbke telesa .....	44
Obrázok číslo 29 - Výsledný tvar trhliny .....	46
Obrázok číslo 30 - Priebeh $K_I$ pre 2D prípad.....	47
Obrázok číslo 31 - Priebeh $K_{II}$ pre 2D prípad .....	48
Obrázok číslo 32 - Priebeh uhlu šírenia trhliny .....	49
Obrázok číslo 33 - Model geometrie pre 3D úlohu valcovej častice .....	49
Obrázok číslo 34 - Detail na sieť konečných prvkov .....	50
Obrázok číslo 35 - OP pre 3D úlohu s valcovou časticou .....	51
Obrázok číslo 36 - Lokálne súradnicové systémy na čele trhliny.....	52
Obrázok číslo 37 - Dva pohľady na priebeh trhliny.....	52
Obrázok číslo 38 - Priebeh $K_I$ pri raste trhliny .....	53
Obrázok číslo 39 – Priebeh $K_{II}$ pri raste trhliny.....	54
Obrázok číslo 40 - Priebeh uhlov pri rastúcej trhlíne.....	55
Obrázok číslo 41 - Trhlinové plochy pre 3D valcovú časticu .....	55
Obrázok číslo 42 - Priebeh $K_I$ pre 2D a 3D prípady .....	57
Obrázok číslo 43 - Priebeh $K_{II}$ pre 2D a 3D prípady .....	58
Obrázok číslo 44 - Uhol šírenia trhliny 2D a 3D .....	60
Obrázok číslo 45 - Tvar trhliny (farebne - 2D, čierne - 3D).....	60
Obrázok číslo 46 - Model geometrie pre 3D guľovú časticu.....	61
Obrázok číslo 47 - Mapovaná sieť guľovej častice.....	61
Obrázok číslo 48 - OP pre 3D úlohu s guľovou časticou .....	62
Obrázok číslo 49 - Priebeh trhliny v prípade 3D s guľovou časticou .....	63

Obrázok číslo 50 - Priebeh $K_I$ vo všetkých súradnicových systémoch.....	64
Obrázok číslo 51 - Priebeh $K_{II}$ vo všetkých súradnicových systémoch.....	64
Obrázok číslo 52 - Priebeh uhlov vo všetkých súradnicových systémoch.....	66
Obrázok číslo 53 - Trhlinové plochy v 3D prípade s guľovou časticou .....	66

## Zoznam tabuliek

Tabuľka číslo 1 - Výsledné hodnoty $K_I$ , $K_{II}$ a $\theta_P$ .....	39
Tabuľka číslo 2 - Výsledné hodnoty $K_I$ , $K_{II}$ a $\theta_P$ .....	39
Tabuľka číslo 3- Model materiálu.....	43
Tabuľka číslo 4 - Porovnanie výsledkov $K_I$ .....	45
Tabuľka číslo 5 - Model materiálu.....	45
Tabuľka číslo 6 - Výsledné hodnoty $K_I$ pre 2D model.....	46
Tabuľka číslo 7 - Výsledné hodnoty $K_{II}$ pre 2D .....	47
Tabuľka číslo 8 - Porovnanie výpočtu uhlov pre 2D úlohu .....	48
Tabuľka číslo 9 - Výsledné hodnoty $K_I$ pre 3D valcovú časticu .....	53
Tabuľka číslo 10 - Výsledné hodnoty $K_{II}$ pre 3D valcovú časticu .....	53
Tabuľka číslo 11 - Porovnanie uhlov po šírke.....	54
Tabuľka číslo 12 - Porovnanie 2D a 3D hodnôt $K_I$ .....	56
Tabuľka číslo 13 - Porovnanie 2D a 3D hodnôt $K_{II}$ .....	58
Tabuľka číslo 14 – Porovnanie 2D a 3D hodnôt uhlov šírenia trhliny .....	59
Tabuľka číslo 15 - Výsledné hodnoty $K_I$ pre 3D prípad s guľovou časticou .....	63
Tabuľka číslo 16 - Výsledné hodnoty $K_{II}$ pre 3D prípad s guľovou časticou .....	63
Tabuľka číslo 17 - Výsledné hodnoty uhlov šírenia trhliny .....	65
Tabuľka číslo 18 - Konštanty vstupujúce do výpočtu.....	67
Tabuľka číslo 19 - Výsledné hodnoty času šírenia trhliny .....	68

## Zoznam príloh

2D_castica	.rar
3D_valec	.rar
3D_gula	.rar